Линейное программирование

Пример:

A, B – товары

Спрос на A – 200 шт в день

—"— B – 300 шт в день

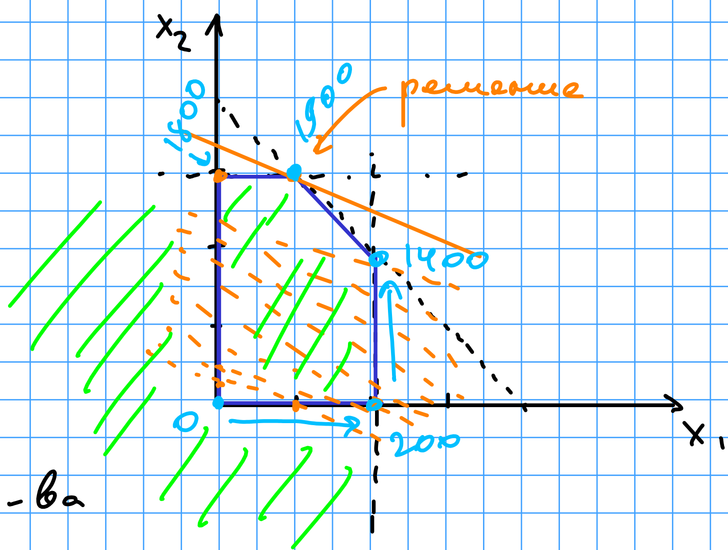
Можем произвести не более 400 товаров в день

Товар B стоит в 6 раз больше, чем A.

x_1 – # A, x_2 – # B

C: $x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \leq 200 \\ x_2 \leq 300 \\ x_1 + x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



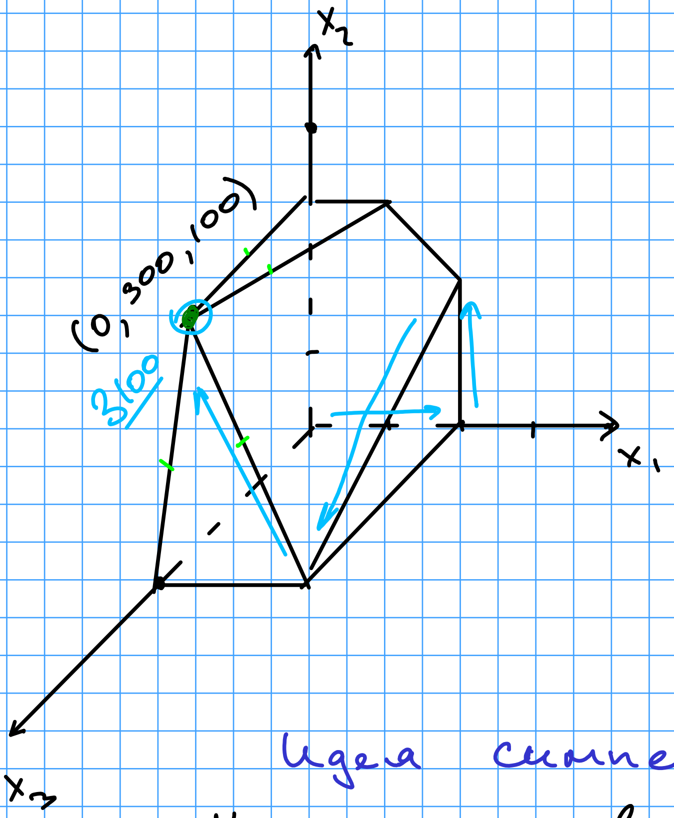
{Ограничение – лин. нер-ва
{Целевая функция – линейна

≡ Задача линейного программирования

Добавим товар C с огр. $x_2 + 3x_3 \leq 600$

$$\begin{cases} x_1 \leq 200 \\ x_2 \leq 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 400 \\ x_2 + 3x_3 \leq 600 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1 + 6x_2 + 13x_3 \to \max$



Наблюдение 1:

ОВР – выпуклый многогранник.

(политоп, полиэдр)

Наблюдение 2:

Оптимум достигается в вершине этого многогранника

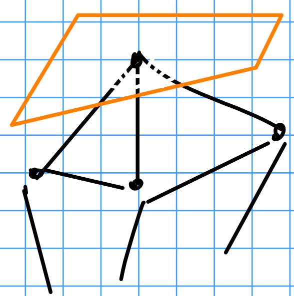
Идея симплекс метода:

v – текущая вершина

if среди соседей есть вершина с лучшим значением целевой ф-ии

⇒ идём туда

else v – оптимум.



Различные формы линейного прогр-ния

1. Ограничения

а) неравенства

б) равенства

(а) $\{a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + a_3^i x_3 \le b_i\}$

$\downarrow$

(б) $\{a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + a_3^i x_3 + s_i = b_i\}$

$s_i \geq 0$

(б) $\{a^i_1 x_1 + a^i_2 x_2 + a^i_3 x_3 = b_i\}$

$\downarrow$

(а) $\{a^i_1 x_1 + a^i_2 x_2 + a^i_3 x_3 \geq b_i,$

$a^i_1 x_1 + a^i_2 x_2 + a^i_3 x_3 \leq b_i\}$

2. Ограничения на переменные

а) неотрицательные

б) любые

(а) $\to$ (б) тривиально

(б) $\to$ (а)

$x_1 = x_1' - x_1''$ $\qquad x_1', x_1'' \geq 0$

Матричная запись

$A\bar{x} \leq b$

В примере $A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \\ 600 \end{vmatrix}$

$x_i \geq 0$

Целевая функция: $c^T x \to \max$

$c = \begin{vmatrix} 1 \\ 6 \\ 13 \end{vmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{l} A\bar{x} \leq b \\ c^T \bar{x} \to \max \end{array}}$$

Двойственность

② + ③ + 4 · ④ $\underline{x_1 + 6x_2 + 13x_3} \le 3100$

Как найти такие коэффициенты?

$y_1 \cdot ① + y_2 ② + y_3 ③ + y_4 ④$

$\underline{y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 (x_1 + x_2 + x_3) + y_4 (x_2 + 3x_3)} \le$

исх.

$\le \underline{y_1 \cdot 200 + y_2 \cdot 300 + y_3 \cdot 400 + y_4 \cdot 600}$ (*)

двойств.

$x_1 (\underbrace{y_1 + y_3}_{1}) + x_2 (\underbrace{y_2 + y_3 + y_4}_{6}) + x_3 (\underbrace{y_3 + 3y_4}_{13}) \le \ldots$

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_1 + y_3 \ge 1 & \\ y_2 + y_3 + y_4 \ge 6 & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \\ y_3 + 3y_4 \ge 13 & \\ & \\ y_1 \cdot 200 + y_2 \cdot 300 + y_3 \cdot 400 + y_4 \cdot 600 \to \min & \end{array}}$$

Утв: $\forall$ решение прямой задачи $\le$ решение двойственной

▷ (*) ◁

Th. о двойственности

Оптимум прямой задачи = оптимуму двойственной

Как построить двойств. задачу

$$\begin{array}{lcl} Ax \le b & & A^T y \ge c \\ x_i \ge 0 & \longleftrightarrow & y_i \ge 0 \\ c^T x \to \max & & b^T y \to \min \\ A' x' = b' & & A'^T y' = c' \end{array}$$

NB: Задача ILP – сложная

Симплекс метод

Вершина – точка, задаваем. n линейными равенств

$A\bar{x} \le b$

$x_i \geq 0$ n переменных, m - неравенств

$c^T x \to max$

Всего вершин : C_m^n (экспонента).

$\Rightarrow$ Симплекс-метод не полиномиальный алгоритм.

Шаг 1.

Вершина : $(0, 0, \dots, 0)$

Выбираем направл. и идем по нему до вершины. Вершина находится методом Гаусса.

В новой вершине переходим к новым переменным

$a_i x \le b_i \quad \longrightarrow \quad y_i = b_i - a x_i$

Для всех неравенств, кот. задают эту вершину.