

# ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ АУ, первый семестр

## ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ

1. Множества, отношения.
2. Аксиомы вещественных чисел. Принцип математической индукции.
3. Супремум и инфимум.
4. Теорема о вложенных отрезках.

## ГЛАВА II. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

5. Предел последовательности. Свойства.
6. Теорема о стабилизации знака и теорема о двух милиционерах.
7. Предел монотонной последовательности.
8. Арифметические действия с пределами.
9. Бесконечные пределы. Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифметические действия в  $\overline{\mathbb{R}}$ .
10. Неравенство Бернулли. Определение числа  $e$ .
11. Сравнение скорости возрастания последовательностей  $n^k$ ,  $a^n$ ,  $n!$  и  $n^n$ .
12. Теорема Штольца.
13. Подпоследовательности. Теорема о стягивающихся отрезках.
14. Теорема Больцано–Вейерштрасса.
15. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.
16. Верхний и нижний пределы. Частичные пределы.

## ГЛАВА III. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

17. Различные определения предела отображений и функций в точке. Равносильность определения предела по Коши и по Гейне.
18. Свойства функций, имеющих предел. Арифметические действия с пределами.
19. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.
20. Односторонние пределы. Предел монотонной функции.
21. Критерий Коши для предела функций.
22. Различные определения непрерывности функций. Их равносильность.
23. Арифметические действия с непрерывными функциями. Теоремы о стабилизации знака и о непрерывности композиции.
24. Неравенства между синусом и аргументом. Непрерывность тригонометрических функций.
25. Теорема Вейерштрасса.
26. Теорема Больцано–Коши. Теоремы о непрерывных образах отрезка и промежутка.
27. Непрерывность обратной функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций.
28. Предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .
29. Определение степенной функции и ее свойства.
30. Определение и непрерывность логарифма. Пределы  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x}$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ .
31. Сравнение функций: отношение эквивалентности, символы Ландау.

## ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

32. Определение производной и дифференцируемости функции в точке. Геометрический и физический смысл производной.
33. Левая и правая производные. Бесконечные производные.
34. Непрерывность дифференцируемой функции. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями.

35. Теоремы о дифференцируемости композиции и обратной функции.
36. Производные элементарных функций.
37. Теоремы Ферма и Ролля, Лагранжа и Коши. Характеристика монотонности дифференцируемых функций.
38. Теорема Дарбу.
39. Правило Лопиталя.
40. Определение производной  $n$ -го порядка. Классы  $C^n(E)$ . Несовпадение классов  $C^n(E)$ .
41. Арифметические свойства производных  $n$ -го порядка. Производные  $n$ -го порядка элементарных функций.
42. Формула Тейлора для многочленов.
43. Формулы Тейлора с остатком в форме Пеано и с остатком в форме Лагранжа.
44. Формулы Тейлора для  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^p$ .
45. Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Разложения  $\sin x$ ,  $\cos x$  и  $e^x$  в ряд.
46. Иррациональность числа  $e$ .
47. Локальные максимумы и минимумы. Необходимое условие экстремума.
48. Достаточные условия экстремума для дифференцируемых функций.
49. Выпуклые и вогнутые функции. Переформулировки определения выпуклости. Лемма о трех хордах.
50. Непрерывность и дифференцируемость выпуклой функции. Характеристика выпуклых функций с помощью касательных.
51. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных.
52. Неравенство Йенсена. Неравенство о средних. Неравенства Гёльдера и Минковского.

## ГЛАВА V. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

53. Определение первообразной и неопределенного интеграла. Общий вид первообразной. Примеры функций не имеющих первообразную.
54. Таблица интегралов. Линейность интеграла.
55. Теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле.
56. Формула интегрирования по частям.
57. Определение и простейшие свойства площади и (псевдо)площади. Примеры площадей.
58. Положительная и отрицательная части функции и их свойства. Подграфик функции.
59. Определенный интеграл. Определение и простейшие свойства. Аддитивность и монотонность интеграла. Среднее значение функции.
60. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Формула Ньютона–Лейбница.
61. Линейность интеграла и формула интегрирования по частям.
62. Замена переменной в определенном интеграле.
63. Вычисление интеграла  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ . Формула Валлиса.
64. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.
65. Иррациональность числа  $\pi$ .