Теория категорий

Интерпретация λ исчисления

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

План лекции

λ исчисление

Интерпретация

Примеры индуктивных типов

Общий случай индуктивных типов

Мотивация

- λ исчисление предоставляет синтаксис для (декартово замкнутых) категорий, а категории предоставляют семантику λ исчисления.

Мотивация

- λ исчисление предоставляет синтаксис для (декартово замкнутых) категорий, а категории предоставляют семантику λ исчисления.
- С одной стороны, λ исчисление позволяет просто описывать различные конструкции в категориях.

Мотивация

- λ исчисление предоставляет синтаксис для (декартово замкнутых) категорий, а категории предоставляют семантику λ исчисления.
- С одной стороны, λ исчисление позволяет просто описывать различные конструкции в категориях.
- С другой стороны, различные конструкции в категориях могут мотивировать новые языковые конструкции для λ исчисления.

Типы

- Пусть Σ – некоторое множество базовых типов.

Типы

- Пусть Σ – некоторое множество базовых типов.
- Тогда множество *Type* типов λ исчисления определяется индуктивно:

$$\frac{A \in \Sigma}{A \in Type} \qquad \frac{}{\top \in Type}$$

$$\frac{A \in Type \qquad B \in Type}{A \times B \in Type} \qquad \frac{A \in Type \qquad B \in Type}{A \to B \in Type}$$

Термы

- Пусть Var – множество переменных.

Термы

- Пусть Var – множество переменных.
- Тогда множество $Term$ термов λ исчисления определяется индуктивно:

$$\frac{}{unit \in Term} \qquad \frac{a \in Term \qquad b \in Term}{(a, b) \in Term}$$

$$\frac{p \in Term}{fst\ p \in Term} \qquad \frac{p \in Term}{snd\ p \in Term}$$

$$\frac{x \in Var \qquad b \in Term}{\lambda x.b \in Term} \qquad \frac{f \in Term \qquad a \in Term}{f\ a \in Term}$$

Типизация

Подмножество корректных термов определяется индуктивно:

$$\frac{}{\vdash} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma, x : A \vdash}, x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash x : A}, (x : A) \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathit{unit} : \top} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash \mathit{fst}\ p : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash \mathit{snd}\ p : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x.b : A \to B} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f\ a : B}$$

Редукция

На множестве термов можно ввести отношение редукции:

$$fst\,(a, b) \Rightarrow a$$
$$snd\,(a, b) \Rightarrow a$$
$$(\lambda x.b)\,a \Rightarrow b[x := a]$$

План лекции

λ исчисление

Интерпретация

Примеры индуктивных типов

Общий случай индуктивных типов

Интерпретация типов

- Пусть $\mathbf{C}$ – декартово замкнутая категория.

Интерпретация типов

- Пусть $\mathbf{C}$ – декартово замкнутая категория.
- Пусть $[\![-]\!] : \Sigma \to Ob(\mathbf{C})$ – функция, интерпретирующая базовые типы.

Интерпретация типов

- Пусть $\mathbf{C}$ – декартово замкнутая категория.
- Пусть $[\![-]\!] : \Sigma \to Ob(\mathbf{C})$ – функция, интерпретирующая базовые типы.
- Тогда мы можем расширить ее на всё множество типов: $[\![-]\!] : Type \to Ob(\mathbf{C})$.

Интерпретация типов

- Пусть $\mathbf{C}$ – декартово замкнутая категория.
- Пусть $[\![-]\!] : \Sigma \to Ob(\mathbf{C})$ – функция, интерпретирующая базовые типы.
- Тогда мы можем расширить ее на всё множество типов: $[\![-]\!] : Type \to Ob(\mathbf{C})$.
- $[\![\top]\!] = 1$.

Интерпретация типов

- Пусть $\mathbf{C}$ – декартово замкнутая категория.
- Пусть $[\![-]\!] : \Sigma \to Ob(\mathbf{C})$ – функция, интерпретирующая базовые типы.
- Тогда мы можем расширить ее на всё множество типов: $[\![-]\!] : Type \to Ob(\mathbf{C})$.
- $[\![\top]\!] = 1$.
- $[\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!]$.

Интерпретация типов

- Пусть **C** – декартово замкнутая категория.
- Пусть $[\![-]\!] : \Sigma \to Ob(\mathbf{C})$ – функция, интерпретирующая базовые типы.
- Тогда мы можем расширить ее на всё множество типов: $[\![-]\!] : \mathit{Type} \to Ob(\mathbf{C})$.
- $[\![\top]\!] = 1$.
- $[\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!]$.
- $[\![A \to B]\!] = [\![B]\!]^{[\![A]\!]}$.

Интерпретация типов

- Пусть $\mathbf{C}$ – декартово замкнутая категория.
- Пусть $[\![-]\!] : \Sigma \to Ob(\mathbf{C})$ – функция, интерпретирующая базовые типы.
- Тогда мы можем расширить ее на всё множество типов: $[\![-]\!] : Type \to Ob(\mathbf{C})$.
- $[\![\top]\!] = 1$.
- $[\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!]$.
- $[\![A \to B]\!] = [\![B]\!]^{[\![A]\!]}$.
- Если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$, то мы можем определить интерпретацию Γ как $[\![\Gamma]\!] = [\![A_1]\!] \times \ldots \times [\![A_n]\!]$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим функцию интерпретации термов.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим функцию интерпретации термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим функцию интерпретации термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- $[\![x_i]\!] = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим функцию интерпретации термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- $[\![x_i]\!] = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$.
- $[\![unit]\!] = !_{[\![\Gamma]\!]}$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим функцию интерпретации термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- $[\![x_i]\!] = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$.
- $[\![unit]\!] =!_{[\![\Gamma]\!]}$.
- $[\![(a, b)]\!] = \langle [\![a]\!], [\![b]\!] \rangle$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим функцию интерпретации термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- $[\![x_i]\!] = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$.
- $[\![unit]\!] = !_{[\![\Gamma]\!]}$.
- $[\![(a, b)]\!] = \langle [\![a]\!], [\![b]\!] \rangle$.
- $[\![fst\ p]\!] = \pi_1 \circ [\![p]\!]$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим функцию интерпретации термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- $[\![x_i]\!] = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$.
- $[\![unit]\!] = !_{[\![\Gamma]\!]}$.
- $[\![(a, b)]\!] = \langle [\![a]\!], [\![b]\!] \rangle$.
- $[\![fst\ p]\!] = \pi_1 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![snd\ p]\!] = \pi_2 \circ [\![p]\!]$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим функцию интерпретации термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- $[\![x_i]\!] = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$.
- $[\![unit]\!] = !_{[\![\Gamma]\!]}$.
- $[\![(a, b)]\!] = \langle [\![a]\!], [\![b]\!] \rangle$.
- $[\![fst\ p]\!] = \pi_1 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![snd\ p]\!] = \pi_2 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![f\ a]\!] = ev \circ \langle [\![f]\!], [\![a]\!] \rangle$, где $ev : [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \times [\![A]\!] \to [\![B]\!]$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим функцию интерпретации термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- $[\![x_i]\!] = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$.
- $[\![unit]\!] = !_{[\![\Gamma]\!]}$.
- $[\![(a, b)]\!] = \langle [\![a]\!], [\![b]\!] \rangle$.
- $[\![fst\ p]\!] = \pi_1 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![snd\ p]\!] = \pi_2 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![f\ a]\!] = ev \circ \langle [\![f]\!], [\![a]\!] \rangle$, где $ev : [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \times [\![A]\!] \to [\![B]\!]$.
- $[\![\lambda x.b]\!] = \varphi([\![b]\!])$, где $\varphi : Hom([\![\Gamma, x : A]\!], [\![B]\!]) \simeq Hom([\![\Gamma]\!], [\![B]\!]^{[\![A]\!]})$.

Интерпретация правил редукции

- Подстановка интерпретируется как композиция, то есть если $\Gamma, x : A \vdash b : B$ и $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![b[x := a]]\!] = [\![b]\!] \circ \langle id_{[\![\Gamma]\!]}, [\![a]\!] \rangle$.

Интерпретация правил редукции

- Подстановка интерпретируется как композиция, то есть если $\Gamma, x : A \vdash b : B$ и $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![b[x := a]]\!] = [\![b]\!] \circ \langle id_{[\![\Gamma]\!]}, [\![a]\!] \rangle$.
- Редукция интерпретируется как равенство, то есть если $a \Rightarrow b$, то $[\![a]\!] = [\![b]\!]$.

Интерпретация правил редукции

- Подстановка интерпретируется как композиция, то есть если $\Gamma, x : A \vdash b : B$ и $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![b[x := a]]\!] = [\![b]\!] \circ \langle id_{[\![\Gamma]\!]}, [\![a]\!]\rangle$.
- Редукция интерпретируется как равенство, то есть если $a \Rightarrow b$, то $[\![a]\!] = [\![b]\!]$.
- Действительно, равенства $\pi_1 \circ \langle a, b\rangle = a$ и $\pi_2 \circ \langle a, b\rangle = b$ верны по определению декартова произведения.

Интерпретация правил редукции

- Подстановка интерпретируется как композиция, то есть если $\Gamma, x : A \vdash b : B$ и $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![b[x := a]]\!] = [\![b]\!] \circ \langle id_{[\![\Gamma]\!]}, [\![a]\!]\rangle$.
- Редукция интерпретируется как равенство, то есть если $a \Rightarrow b$, то $[\![a]\!] = [\![b]\!]$.
- Действительно, равенства $\pi_1 \circ \langle a, b\rangle = a$ и $\pi_2 \circ \langle a, b\rangle = b$ верны по определению декартова произведения.
- Равенство $ev \circ \langle\varphi(b), a\rangle = b \circ \langle id, a\rangle$ следует из равенства $ev \circ (\varphi(b) \times id_A) = b$.

План лекции

λ исчисление

Интерпретация

Примеры индуктивных типов

Общий случай индуктивных типов

Тип *Bool*

- Мы можем расширять λ исчисления, добавляя новые типы и конструкции.

Тип *Bool*

- Мы можем расширять λ исчисления, добавляя новые типы и конструкции.
- Сейчас мы добавим тип *Bool*. Для этого добавим следующее индуктивное правило:

$$\frac{}{Bool \in Type}$$

Тип *Bool*

- Мы можем расширять λ исчисления, добавляя новые типы и конструкции.
- Сейчас мы добавим тип *Bool*. Для этого добавим следующее индуктивное правило:

$$\frac{}{Bool \in Type}$$

- Кроме того, добавим следующие термы:

$$\frac{}{true \in Term} \qquad \frac{}{false \in Term}$$

$$\frac{c \in Term \qquad t \in Term \qquad e \in Term}{if\ c\ t\ e \in Term}$$

Типизация *Bool*

- Правила типизации для *Bool*:

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash true : Bool} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash false : Bool}$$

$$\frac{\Gamma \vdash c : Bool \qquad \Gamma \vdash t : A \qquad \Gamma \vdash e : A}{\Gamma \vdash if\ c\ t\ e : A}$$

Типизация *Bool*

- Правила типизации для *Bool*:

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash true : Bool} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash false : Bool}$$

$$\frac{\Gamma \vdash c : Bool \qquad \Gamma \vdash t : A \qquad \Gamma \vdash e : A}{\Gamma \vdash if\ c\ t\ e : A}$$

- Правила редукции для *Bool*:

$$if\ true\ t\ e \Rightarrow t$$

$$if\ false\ t\ e \Rightarrow e$$

Интерпретация *Bool*

- Пусть в $\mathbf{C}$ существует булевский объект 2, тогда мы можем проинтерпретировать *Bool* как $[\![Bool]\!] = 2$.

Интерпретация *Bool*

- Пусть в $\mathbf{C}$ существует булевский объект 2, тогда мы можем проинтерпретировать *Bool* как $[\![Bool]\!] = 2$.
- *true* и *false* интерпретируются как морфизмы $tt \circ !_{[\![\Gamma]\!]}$ и $ff \circ !_{[\![\Gamma]\!]}$, где tt и ff – соответствующие морфизмы $1 \to 2$.

Интерпретация *Bool*

- Пусть в **C** существует булевский объект 2, тогда мы можем проинтерпретировать *Bool* как $[\![Bool]\!] = 2$.
- *true* и *false* интерпретируются как морфизмы $tt \circ !_{[\![\Gamma]\!]}$ и $ff \circ !_{[\![\Gamma]\!]}$, где *tt* и *ff* – соответствующие морфизмы $1 \to 2$.
- *if* интерпретируется следующим образом:

$$[\![if\ c\ t\ e]\!] = if \circ \langle [\![c]\!], [\![t]\!], [\![e]\!] \rangle.$$

Интерпретация *Bool*

- Пусть в **C** существует булевский объект 2, тогда мы можем проинтерпретировать *Bool* как $[\![Bool]\!] = 2$.
- *true* и *false* интерпретируются как морфизмы $tt \circ !_{[\![\Gamma]\!]}$ и $ff \circ !_{[\![\Gamma]\!]}$, где tt и ff – соответствующие морфизмы $1 \to 2$.
- *if* интерпретируется следующим образом:

$$[\![if\ c\ t\ e]\!] = if \circ \langle [\![c]\!], [\![t]\!], [\![e]\!] \rangle.$$

- Правила редукции верны по определению булевского объекта.

Тип *Nat*

- Сейчас мы добавим тип натуральных чисел Nat. Для этого добавим следующее индуктивное правило:

$$\frac{}{Nat \in Type}$$

Тип *Nat*

- Сейчас мы добавим тип натуральных чисел Nat. Для этого добавим следующее индуктивное правило:

$$\frac{}{Nat \in Type}$$

- Кроме того, добавим следующие термы:

$$\frac{}{zero \in Term} \qquad \frac{n \in Term}{suc\ n \in Term}$$

$$\frac{z \in Term \qquad s \in Term \qquad n \in Term}{R\ z\ s\ n \in Term}$$

Типизация *Nat*

- Правила типизации для *Nat*:

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash zero : Nat} \qquad \frac{\Gamma \vdash n : Nat}{\Gamma \vdash suc\, n : Nat}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : A \qquad \Gamma \vdash s : Nat \to A \to A \qquad \Gamma \vdash n : Nat}{\Gamma \vdash R\, z\, s\, n : A}$$

Типизация *Nat*

- Правила типизации для *Nat*:

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash zero : Nat} \qquad \frac{\Gamma \vdash n : Nat}{\Gamma \vdash suc\, n : Nat}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : A \qquad \Gamma \vdash s : Nat \to A \to A \qquad \Gamma \vdash n : Nat}{\Gamma \vdash R\, z\, s\, n : A}$$

- Правила редукции для *Nat*:

$$R\, z\, s\, zero \Rightarrow z$$

$$R\, z\, s\, (suc\, n) \Rightarrow s\, n\, (R\, z\, s\, n)$$

Интерпретация *Nat*

- Пусть в $\mathbf{C}$ существует булевский объект натуральных чисел $\mathbb{N}$, тогда мы можем проинтерпретировать Nat как $[\![Nat]\!] = \mathbb{N}$.

Интерпретация *Nat*

- Пусть в **C** существует булевский объект натуральных чисел $\mathbb{N}$, тогда мы можем проинтерпретировать *Nat* как $[\![Nat]\!] = \mathbb{N}$.
- *zero* и *suc n* интерпретируются как морфизмы $zero \circ !_{[\![\Gamma]\!]}$ и $suc \circ [\![n]\!]$.

Интерпретация *Nat*

- Пусть в **C** существует булевский объект натуральных чисел $\mathbb{N}$, тогда мы можем проинтерпретировать *Nat* как $[\![Nat]\!] = \mathbb{N}$.
- *zero* и *suc n* интерпретируются как морфизмы $zero \circ !_{[\![\Gamma]\!]}$ и $suc \circ [\![n]\!]$.
- Для интерпретации R нам нужно доказать, что существует морфизм $rec : A \times A^{A^{\mathbb{N}}} \times \mathbb{N} \to A$, удовлетворяющий определенным равенствам.

Интерпретация Nat

- Пусть в $\mathbf{C}$ существует булевский объект натуральных чисел $\mathbb{N}$, тогда мы можем проинтерпретировать Nat как $[\![Nat]\!] = \mathbb{N}$.
- $zero$ и $suc\ n$ интерпретируются как морфизмы $zero \circ !_{[\![\Gamma]\!]}$ и $suc \circ [\![n]\!]$.
- Для интерпретации R нам нужно доказать, что существует морфизм $rec : A \times A^{A^{\mathbb{N}}} \times \mathbb{N} \to A$, удовлетворяющий определенным равенствам.
- Тогда мы можем проинтерпретировать R как

$$[\![R\ z\ s\ n]\!] = rec \circ \langle [\![z]\!], s, [\![n]\!] \rangle.$$

Определение *rec*

- По определению $\mathbb{N}$ для любых $f : 1 \to X$ и $g : X \to X$ существует уникальная $h : \mathbb{N} \to X$, такой что

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "zero"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "suc"] \arrow[d, dashed, "h"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "h"] \\
& X \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}
$$

Определение *rec*

- По определению $\mathbb{N}$ для любых $f : 1 \to X$ и $g : X \to X$ существует уникальная $h : \mathbb{N} \to X$, такой что

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "zero"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "suc"] \arrow[d, dashed, "h"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & X \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}
$$

- Пусть $X = [\![n : Nat, f : A \to (Nat \to A \to A) \to A]\!] = \mathbb{N} \times [\![A \to (Nat \to A \to A) \to A]\!]$.

Определение *rec*

- По определению $\mathbb{N}$ для любых $f : 1 \to X$ и $g : X \to X$ существует уникальная $h : \mathbb{N} \to X$, такой что

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "zero"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "suc"] \arrow[d, dashed, "h"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "h"] \\
& X \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}$$

- Пусть $X = [\![n : Nat, f : A \to (Nat \to A \to A) \to A]\!] = \mathbb{N} \times [\![A \to (Nat \to A \to A) \to A]\!]$.
- Пусть $f = [\![(zero, \lambda zs.z)]\!]$ и $g = [\![(suc\, n, \lambda zs.s\, n\, (f\ z\ s))]\!]$.

Определение *rec*

- По определению $\mathbb{N}$ для любых $f : 1 \to X$ и $g : X \to X$ существует уникальная $h : \mathbb{N} \to X$, такой что

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "zero"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "suc"] \arrow[d, dashed, "h"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "h"] \\
& X \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}$$

- Пусть $X = [\![n : Nat, f : A \to (Nat \to A \to A) \to A]\!] = \mathbb{N} \times [\![A \to (Nat \to A \to A) \to A]\!]$.
- Пусть $f = [\![(zero, \lambda zs.z)]\!]$ и $g = [\![(suc\, n, \lambda zs.s\, n\, (f\, z\, s))]\!]$.
- Тогда определим *rec* как уникальную h для этих f и g.

План лекции

λ исчисление

Интерпретация

Примеры индуктивных типов

Общий случай индуктивных типов

Определение индуктивных типов

- В общем случае индуктивные типы определяются следующим образом:

$$data\, D = con_1\, A_{1,1}\ \ldots\ A_{1,n_1} \mid \ldots \mid con_k\, A_{k,1}\ \ldots\ A_{k,n_k}$$

Определение индуктивных типов

- В общем случае индуктивные типы определяются следующим образом:

$$data\, D = con_1\, A_{1,1}\, \ldots\, A_{1,n_1} \mid \ldots \mid con_k\, A_{k,1}\, \ldots\, A_{k,n_k}$$

- Сегодня мы будем рассматривать только типы без параметров.

Определение индуктивных типов

- В общем случае индуктивные типы определяются следующим образом:

$$data\ D = con_1\ A_{1,1}\ \ldots\ A_{1,n_1}\ |\ \ldots\ |\ con_k\ A_{k,1}\ \ldots\ A_{k,n_k}$$

- Сегодня мы будем рассматривать только типы без параметров.
- В хаскелле $A_{i,j}$ могут быть произвольными выражениями, но это позволяет определять типы, не имеющие моделей в **Set** и в многих других категориях.

Определение индуктивных типов

- В общем случае индуктивные типы определяются следующим образом:

$$data\, D = con_1\, A_{1,1} \ldots A_{1,n_1} \mid \ldots \mid con_k\, A_{k,1} \ldots A_{k,n_k}$$

- Сегодня мы будем рассматривать только типы без параметров.
- В хаскелле $A_{i,j}$ могут быть произвольными выражениями, но это позволяет определять типы, не имеющие моделей в **Set** и в многих других категориях.
- Поэтому мы ограничимся случаем когда каждый $A_{i,j}$ имеет вид $B_1 \to \ldots \to B_m \to D$, либо не упоминает D вообще.

Определение индуктивных типов

- В общем случае индуктивные типы определяются следующим образом:

$$data\, D = con_1\, A_{1,1}\, \ldots\, A_{1,n_1} \mid \ldots \mid con_k\, A_{k,1}\, \ldots\, A_{k,n_k}$$

- Сегодня мы будем рассматривать только типы без параметров.
- В хаскелле $A_{i,j}$ могут быть произвольными выражениями, но это позволяет определять типы, не имеющие моделей в **Set** и в многих других категориях.
- Поэтому мы ограничимся случаем когда каждый $A_{i,j}$ имеет вид $B_1 \to \ldots \to B_m \to D$, либо не упоминает D вообще.
- Это покрывает большинство полезных примеров индуктивных типов данных.

Интерпретация индуктивных типов

- Если D – индуктивный тип данных, то мы можем сопоставить ему эндофунктор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ над любой декартово замкнутой категорией $\mathbf{C}$.

Интерпретация индуктивных типов

- Если D – индуктивный тип данных, то мы можем сопоставить ему эндофунктор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ над любой декартово замкнутой категорией $\mathbf{C}$.
- Если $A_{i,j} = B_1 \to \ldots \to B_m \to D$, то пусть $[\![A_{i,j}]\!](X) = X^{[\![B_1]\!] \times \ldots \times [\![B_m]\!]}$.

Интерпретация индуктивных типов

- Если D – индуктивный тип данных, то мы можем сопоставить ему эндофунктор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ над любой декартово замкнутой категорией $\mathbf{C}$.
- Если $A_{i,j} = B_1 \to \ldots \to B_m \to D$, то пусть $[\![A_{i,j}]\!](X) = X^{[\![B_1]\!] \times \ldots \times [\![B_m]\!]}$.
- Если $A_{i,j}$ не упоминает D, то пусть $[\![A_{i,j}]\!]$ будет константным функтором.

Интерпретация индуктивных типов

- Если D – индуктивный тип данных, то мы можем сопоставить ему эндофунктор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ над любой декартово замкнутой категорией $\mathbf{C}$.
- Если $A_{i,j} = B_1 \to \ldots \to B_m \to D$, то пусть $[\![A_{i,j}]\!](X) = X^{[\![B_1]\!] \times \ldots \times [\![B_m]\!]}$.
- Если $A_{i,j}$ не упоминает D, то пусть $[\![A_{i,j}]\!]$ будет константным функтором.
- Если con имеет аргументы $A_1 \ldots A_n$, то пусть $[\![con]\!](X) = [\![A_1]\!](X) \times \ldots \times [\![A_n]\!](X)$.

Интерпретация индуктивных типов

- Если D – индуктивный тип данных, то мы можем сопоставить ему эндофунктор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ над любой декартово замкнутой категорией $\mathbf{C}$.
- Если $A_{i,j} = B_1 \to \ldots \to B_m \to D$, то пусть $[\![A_{i,j}]\!](X) = X^{[\![B_1]\!] \times \ldots \times [\![B_m]\!]}$.
- Если $A_{i,j}$ не упоминает D, то пусть $[\![A_{i,j}]\!]$ будет константным функтором.
- Если con имеет аргументы $A_1 \ldots A_n$, то пусть $[\![con]\!](X) = [\![A_1]\!](X) \times \ldots \times [\![A_n]\!](X)$.
- Если D имеет конструкторы $con_1, \ldots con_k$, то пусть $[\![D]\!](X) = [\![con_1]\!](X) \amalg \ldots \amalg [\![con_k]\!](X)$.

F-алгебры

- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, то F-алгебра – это пара (A, f), где $A \in Ob(\mathbf{C})$ и $f : F(A) \to A$.

F-алгебры

- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, то F-алгебра – это пара (A, f), где $A \in Ob(\mathbf{C})$ и $f : F(A) \to A$.
- Категория F-алгебр определяется очевидным образом.

F-алгебры

- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, то F-алгебра – это пара (A, f), где $A \in Ob(\mathbf{C})$ и $f : F(A) \to A$.
- Категория F-алгебр определяется очевидным образом.
- Если F – функтор, соответствующий типу данных D, то D можно проинтерпретировать как начальную F-алгебру.

F-алгебры

- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, то F-алгебра – это пара (A, f), где $A \in Ob(\mathbf{C})$ и $f : F(A) \to A$.
- Категория F-алгебр определяется очевидным образом.
- Если F – функтор, соответствующий типу данных D, то D можно проинтерпретировать как начальную F-алгебру.
- Возникает вопрос: когда начальная F-алгебра существует?

F-алгебры

- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, то F-алгебра – это пара (A, f), где $A \in Ob(\mathbf{C})$ и $f : F(A) \to A$.
- Категория F-алгебр определяется очевидным образом.
- Если F – функтор, соответствующий типу данных D, то D можно проинтерпретировать как начальную F-алгебру.
- Возникает вопрос: когда начальная F-алгебра существует?
- Если в $\mathbf{C}$ существуют копределы и F их сохраняет, то она существует.

F-алгебры

- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, то F-алгебра – это пара (A, f), где $A \in Ob(\mathbf{C})$ и $f : F(A) \to A$.
- Категория F-алгебр определяется очевидным образом.
- Если F – функтор, соответствующий типу данных D, то D можно проинтерпретировать как начальную F-алгебру.
- Возникает вопрос: когда начальная F-алгебра существует?
- Если в $\mathbf{C}$ существуют копределы и F их сохраняет, то она существует.
- Если каждый $A_{i,j}$ либо равен D, либо не упоминает D, то F сохраняет копределы.

F-алгебры

- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, то F-алгебра – это пара (A, f), где $A \in Ob(\mathbf{C})$ и $f : F(A) \to A$.
- Категория F-алгебр определяется очевидным образом.
- Если F – функтор, соответствующий типу данных D, то D можно проинтерпретировать как начальную F-алгебру.
- Возникает вопрос: когда начальная F-алгебра существует?
- Если в $\mathbf{C}$ существуют копределы и F их сохраняет, то она существует.
- Если каждый $A_{i,j}$ либо равен D, либо не упоминает D, то F сохраняет копределы.
- Более общий случай рассматривается в упражнениях.

Существование начальной F-алгебры

Proposition

Если в **C** *существуют копределы и F их сохраняет, то начальная F-алгебра существует.*

Доказательство.

Рассмотрим последовательность

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots$$

где $X_0 = 0$, $X_{i+1} = F(X_i)$, $f_0 = !_{X_1}$ и $f_{i+1} = F(f_i)$. Пусть $A = colim\, X_i$ и $f : F(A) \to A$ будет композицией $F(colim\, X_i) \simeq colim\, F(X_i) = colim\, X_{i+1} \simeq colim\, X_i$. Если (B, g) – некоторая F-алгебра, то морфизм из A в B задается последовательностью морфизмов $h_i : X_i \to B$.

Существование начальной F-алгебры

Доказательство.

Эти морфизмы должны удовлетворять условию

$$\begin{tikzcd}
X_{i+1} \arrow[d, "F(h_i)"'] \arrow[dr, "h_{i+1}"] & \\
F(B) \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Морфизм h_0 уникален, а h_{i+1} уникально определяются из диаграммы выше. Следовательно (A, f) является начальной F-алгеброй. □