

Теория категорий

Функторы и естественные преобразования

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

Функторы

Подкатегории

Естественные преобразования

Определение функторов

- ▶ Функторы между категориями **C** и **D** – это морфизмы категорий.

Определение функторов

- ▶ Функторы между категориями \mathbf{C} и \mathbf{D} – это морфизмы категорий.
- ▶ Функтор F состоит из функции $F : Ob(\mathbf{C}) \rightarrow Ob(\mathbf{D})$ и функций $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ для всех $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$.

Определение функторов

- ▶ Функторы между категориями \mathbf{C} и \mathbf{D} – это морфизмы категорий.
- ▶ Функтор F состоит из функции $F : Ob(\mathbf{C}) \rightarrow Ob(\mathbf{D})$ и функций $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ для всех $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$.
- ▶ Эти функции должны сохранять тождественные морфизмы и композиции:

$$F(id_X) = id_{F(X)}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Забывающие функторы

- ▶ Забывающий функтор **Grp** \rightarrow **Set**, сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.

Забывающие функторы

- ▶ Забывающий функтор $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- ▶ Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$, $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$, и так далее.

Забывающие функторы

- ▶ Забывающий функтор $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- ▶ Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$, $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$, и так далее.
- ▶ Можно задавать функторы, которые забывают не всю информацию.

Забывающие функторы

- ▶ Забывающий функтор $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- ▶ Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$, $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$, и так далее.
- ▶ Можно задавать функторы, которые забывают не всю информацию.
- ▶ Например, существует два забывающих функтора $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Grp}$ и $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.

Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- ▶ Если M и N – пара моноидов, и \mathbf{C}_M и \mathbf{C}_N – категории на одном объекте, соответствующие этим моноидам, то функторы между \mathbf{C}_M и \mathbf{C}_N – это в точности гомоморфизмы моноидов M и N .

Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- ▶ Если M и N – пара моноидов, и \mathbf{C}_M и \mathbf{C}_N – категории на одном объекте, соответствующие этим моноидам, то функторы между \mathbf{C}_M и \mathbf{C}_N – это в точности гомоморфизмы моноидов M и N .
- ▶ Пусть \mathbf{C} – декартова категория и A – объект \mathbf{C} , тогда $A \times - : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ – функтор, сопоставляющий каждому объекту B объект $A \times B$ и каждому морфизму $f : B \rightarrow B'$ морфизм $id_A \times f : A \times B \rightarrow A \times B'$.

Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- ▶ Если M и N – пара моноидов, и \mathbf{C}_M и \mathbf{C}_N – категории на одном объекте, соответствующие этим моноидам, то функторы между \mathbf{C}_M и \mathbf{C}_N – это в точности гомоморфизмы моноидов M и N .
- ▶ Пусть \mathbf{C} – декартова категория и A – объект \mathbf{C} , тогда $A \times - : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ – функтор, сопоставляющий каждому объекту B объект $A \times B$ и каждому морфизму $f : B \rightarrow B'$ морфизм $id_A \times f : A \times B \rightarrow A \times B'$.
- ▶ “Существует” очевидный функтор $I : \mathbf{Hask}_{total} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- ▶ Если M и N – пара моноидов, и \mathbf{C}_M и \mathbf{C}_N – категории на одном объекте, соответствующие этим моноидам, то функторы между \mathbf{C}_M и \mathbf{C}_N – это в точности гомоморфизмы моноидов M и N .
- ▶ Пусть \mathbf{C} – декартова категория и A – объект \mathbf{C} , тогда $A \times - : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ – функтор, сопоставляющий каждому объекту B объект $A \times B$ и каждому морфизму $f : B \rightarrow B'$ морфизм $id_A \times f : A \times B \rightarrow A \times B'$.
- ▶ “Существует” очевидный функтор $I : \mathbf{Hask}_{total} \rightarrow \mathbf{Set}$.
- ▶ “Функторам” в хаскелле соответствуют функторы $\mathbf{Hask} \rightarrow \mathbf{Hask}$.

Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории \mathbf{C} существует тождественный функтор $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, отправляющий каждый объект и морфизм в себя.

Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории \mathbf{C} существует тождественный функтор $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- ▶ Если $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ и $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$, то функтор $G \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ определяется на объектах и на морфизмах как композиция F и G .

Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории \mathbf{C} существует тождественный функтор $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- ▶ Если $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ и $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$, то функтор $G \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ определяется на объектах и на морфизмах как композиция F и G .
- ▶ Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.

Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории \mathbf{C} существует тождественный функтор $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- ▶ Если $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ и $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$, то функтор $G \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ определяется на объектах и на морфизмах как композиция F и G .
- ▶ Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *изоморфизмом* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такой, что $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$ и $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$.

Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории \mathbf{C} существует тождественный функтор $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- ▶ Если $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ и $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$, то функтор $G \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ определяется на объектах и на морфизмах как композиция F и G .
- ▶ Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *изоморфизмом* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такой, что $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$ и $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$.
- ▶ Категории \mathbf{C} и \mathbf{D} *изоморфны*, если существует изоморфизм $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.

Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ можно определить понятие предела $\lim F$ и копредела $\operatorname{colim} F$. Определение такое же как и для диаграмм.

Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ можно определить понятие предела $\lim F$ и копредела $\operatorname{colim} F$. Определение такое же как и для диаграмм.
- ▶ Категории \mathbf{J} можно рассматривать как обобщение графов, а функтор $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ – как обобщение диаграмм в \mathbf{C} .

Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ можно определить понятие предела $\lim F$ и копредела $\operatorname{colim} F$. Определение такое же как и для диаграмм.
- ▶ Категории \mathbf{J} можно рассматривать как обобщение графов, а функтор $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ – как обобщение диаграмм в \mathbf{C} .
- ▶ Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимнообратные)

Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ можно определить понятие предела $\lim F$ и копредела $\operatorname{colim} F$. Определение такое же как и для диаграмм.
- ▶ Категории \mathbf{J} можно рассматривать как обобщение графов, а функтор $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ – как обобщение диаграмм в \mathbf{C} .
- ▶ Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимнообратные)
- ▶ Но пределы и копределы соответствующих диаграмм и функторов будут совпадать.

Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ можно определить понятие предела $\lim F$ и копредела $\operatorname{colim} F$. Определение такое же как и для диаграмм.
- ▶ Категории \mathbf{J} можно рассматривать как обобщение графов, а функтор $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ – как обобщение диаграмм в \mathbf{C} .
- ▶ Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимнообратные)
- ▶ Но пределы и копределы соответствующих диаграмм и функторов будут совпадать.
- ▶ Функторы $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ тоже называют диаграммами.

План лекции

Функторы

Подкатегории

Естественные преобразования

Подкатегории

- ▶ *Подкатегория \mathbf{C}' категории \mathbf{C}* – это подкласс объектов \mathbf{C} и для каждой пары объектов X, Y в \mathbf{C}' подкласс множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ такие, что \mathbf{C}' содержит тождественные морфизмы для любого $X \in \mathbf{C}'$ и замкнут относительно композиции.

Подкатегории

- ▶ Подкатегория \mathbf{C}' категории \mathbf{C} – это подкласс объектов \mathbf{C} и для каждой пары объектов X, Y в \mathbf{C}' подкласс множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ такие, что \mathbf{C}' содержит тождественные морфизмы для любого $X \in \mathbf{C}'$ и замкнут относительно композиции.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *строгим* (*faithful*), если для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ функция $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ инъективна.

Подкатегории

- ▶ Подкатегория \mathbf{C}' категории \mathbf{C} – это подкласс объектов \mathbf{C} и для каждой пары объектов X, Y в \mathbf{C}' подкласс множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ такие, что \mathbf{C}' содержит тождественные морфизмы для любого $X \in \mathbf{C}'$ и замкнут относительно композиции.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *строгим* (*faithful*), если для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ функция $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ инъективна.
- ▶ Подкатегории категории \mathbf{C} – классы эквивалентности строгих инъективных на объектах функторов.

Подкатегории

- ▶ Подкатегория \mathbf{C}' категории \mathbf{C} – это подкласс объектов \mathbf{C} и для каждой пары объектов X, Y в \mathbf{C}' подкласс множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ такие, что \mathbf{C}' содержит тождественные морфизмы для любого $X \in \mathbf{C}'$ и замкнут относительно композиции.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *строгим* (*faithful*), если для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ функция $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ инъективна.
- ▶ Подкатегории категории \mathbf{C} – классы эквивалентности строгих инъективных на объектах функторов.
- ▶ Проблема этого определения заключается в том, что оно не стабильно относительно изоморфизмов объектов \mathbf{C} (то есть, X может принадлежать \mathbf{C}' , а изоморфный ему объект Y – нет).

Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория \mathbf{C}' категории \mathbf{C} называется *полной*, если для любых объектов X, Y в \mathbf{C}' множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$ и $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ равны.

Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория \mathbf{C}' категории \mathbf{C} называется *полной*, если для любых объектов X, Y в \mathbf{C}' множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$ и $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ равны.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *полным*, если для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ функция $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ сюръективна.

Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория \mathbf{C}' категории \mathbf{C} называется *полной*, если для любых объектов X, Y в \mathbf{C}' множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$ и $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ равны.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *полным*, если для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ функция $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ сюръективна.
- ▶ Полные подкатегории категории \mathbf{C} – классы эквивалентности полных строгих функторов.

Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория \mathbf{C}' категории \mathbf{C} называется *полной*, если для любых объектов X, Y в \mathbf{C}' множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$ и $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ равны.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *полным*, если для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ функция $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ сюръективна.
- ▶ Полные подкатегории категории \mathbf{C} – классы эквивалентности полных строгих функторов.
- ▶ Теперь необязательно требовать инъективность на объектах.

Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория \mathbf{C}' категории \mathbf{C} называется *полной*, если для любых объектов X, Y в \mathbf{C}' множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$ и $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ равны.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *полным*, если для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ функция $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ сюръективна.
- ▶ Полные подкатегории категории \mathbf{C} – классы эквивалентности полных строгих функторов.
- ▶ Теперь необязательно требовать инъективность на объектах.
- ▶ Полные строгие функторы мы будем называть *вложениями* категорий.

Примеры

- ▶ **\mathbf{Set}_{fin}** — полная подкатегория **\mathbf{Set}** .

Примеры

- ▶ **\mathbf{Set}_{fin}** – полная подкатегория **\mathbf{Set}** .
- ▶ **\mathbf{Ab}** – полная подкатегория **\mathbf{Grp}** .

Примеры

- ▶ **\mathbf{Set}_{fin}** – полная подкатегория **\mathbf{Set}** .
- ▶ **\mathbf{Ab}** – полная подкатегория **\mathbf{Grp}** .
- ▶ “Существует” не полное вложение **\mathbf{Hask}_{total}** в **\mathbf{Set}** .

Примеры

- ▶ **\mathbf{Set}_{fin}** – полная подкатегория **\mathbf{Set}** .
- ▶ **\mathbf{Ab}** – полная подкатегория **\mathbf{Grp}** .
- ▶ “Существует” не полное вложение **\mathbf{Hask}_{total}** в **\mathbf{Set}** .
- ▶ Все забывающий функторы, которые мы рассматривали, являются строгими.

План лекции

Функторы

Подкатегории

Естественные преобразования

Определение

- ▶ Можно определить понятие морфизма между функторами $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.

Определение

- ▶ Можно определить понятие морфизма между функторами $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.
- ▶ *Естественное преобразование* $\alpha : F \rightarrow G$ – это функция, сопоставляющая каждому объекту X из \mathbf{C} морфизм $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$, удовлетворяющая условию, что для любого морфизма $f : X \rightarrow Y$ в \mathbf{C} следующий квадрат коммутирует:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) \end{array}$$

Категория функторов

- ▶ Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.

Категория функторов

- ▶ Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.
- ▶ Если $\alpha : F \rightarrow G$ – естественное преобразование, то каждому морфизму $f : X \rightarrow Y$ в \mathbf{C} можно сопоставить морфизм $\alpha_f : F(X) \rightarrow G(Y)$ в \mathbf{D} .

Категория функторов

- ▶ Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.
- ▶ Если $\alpha : F \rightarrow G$ – естественное преобразование, то каждому морфизму $f : X \rightarrow Y$ в \mathbf{C} можно сопоставить морфизм $\alpha_f : F(X) \rightarrow G(Y)$ в \mathbf{D} .
- ▶ Морфизм α_f определяется как композиция $F(f) \circ \alpha_Y$, что равно $\alpha_X \circ G(f)$ по естественности.

Категория функторов

- ▶ Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.
- ▶ Если $\alpha : F \rightarrow G$ – естественное преобразование, то каждому морфизму $f : X \rightarrow Y$ в \mathbf{C} можно сопоставить морфизм $\alpha_f : F(X) \rightarrow G(Y)$ в \mathbf{D} .
- ▶ Морфизм α_f определяется как композиция $F(f) \circ \alpha_Y$, что равно $\alpha_X \circ G(f)$ по естественности.
- ▶ Этот морфизм – это диагональ в коммутативном квадрате, который появляется в определении естественности.

Композиция естественных преобразований

- ▶ Если $\alpha : F \rightarrow G$ и $\beta : G \rightarrow H$ – пара естественных преобразований, то можно определить их композицию $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H$ как функцию, сопоставляющую каждому X из \mathbf{C} морфизм $\beta_X \circ \alpha_X : F(X) \rightarrow H(X)$.

Композиция естественных преобразований

- ▶ Если $\alpha : F \rightarrow G$ и $\beta : G \rightarrow H$ – пара естественных преобразований, то можно определить их композицию $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H$ как функцию, сопоставляющую каждому X из \mathbf{C} морфизм $\beta_X \circ \alpha_X : F(X) \rightarrow H(X)$.
- ▶ Композиция $\beta \circ \alpha$ – естественна:

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) & \xrightarrow{\beta_X} & H(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) & \xrightarrow{\beta_Y} & H(Y) \end{array}$$

Категория функторов

- ▶ Для любого функтора $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ существует тождественное естественное преобразование, сопоставляющее каждому X тождественный морфизм $id_{F(X)} : F(X) \rightarrow F(X)$.

Категория функторов

- ▶ Для любого функтора $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ существует тождественное естественное преобразование, сопоставляющее каждому X тождественный морфизм $id_{F(X)} : F(X) \rightarrow F(X)$.
- ▶ Композиция – ассоциативна, тождественное преобразование является единицей для композиции.

Категория функторов

- ▶ Для любого функтора $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ существует тождественное естественное преобразование, сопоставляющее каждому X тождественный морфизм $id_{F(X)} : F(X) \rightarrow F(X)$.
- ▶ Композиция – ассоциативна, тождественное преобразование является единицей для композиции.
- ▶ Таким образом, для любой пары категорий \mathbf{C} и \mathbf{D} существует категория функторов, которая обозначается $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *эквивалентностью* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, такой что $G \circ F$ изоморфен $Id_{\mathbf{C}}$ в категории $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, и $F \circ G$ изоморфен $Id_{\mathbf{D}}$ в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$.

Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *эквивалентностью* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, такой что $G \circ F$ изоморфен $Id_{\mathbf{C}}$ в категории $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, и $F \circ G$ изоморфен $Id_{\mathbf{D}}$ в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$.
- ▶ Категории \mathbf{C} и \mathbf{D} называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.

Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *эквивалентностью* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, такой что $G \circ F$ изоморфен $Id_{\mathbf{C}}$ в категории $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, и $F \circ G$ изоморфен $Id_{\mathbf{D}}$ в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$.
- ▶ Категории \mathbf{C} и \mathbf{D} называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.
- ▶ Чтобы убедиться, что функтор является эквивалентностью, нужно проверять много условий.

Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *эквивалентностью* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, такой что $G \circ F$ изоморфен $Id_{\mathbf{C}}$ в категории $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, и $F \circ G$ изоморфен $Id_{\mathbf{D}}$ в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$.
- ▶ Категории \mathbf{C} и \mathbf{D} называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.
- ▶ Чтобы убедиться, что функтор является эквивалентностью, нужно проверять много условий.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ является эквивалентностью, если он полный, строгий и *существенно сюръективен на объектах*.

Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *эквивалентностью* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, такой что $G \circ F$ изоморфен $Id_{\mathbf{C}}$ в категории $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, и $F \circ G$ изоморфен $Id_{\mathbf{D}}$ в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$.
- ▶ Категории \mathbf{C} и \mathbf{D} называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.
- ▶ Чтобы убедиться, что функтор является эквивалентностью, нужно проверять много условий.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ является эквивалентностью, если он полный, строгий и *существенно сюръективен на объектах*.
- ▶ Последнее условие означает, что для любого объекта X в \mathbf{D} существует объект Y в \mathbf{C} , такой что $F(Y)$ изоморфен X .

Пример

- ▶ Определим функтор $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$, такой что $F(n) = \mathbb{R}^n$ и $F(A)(v) = A \cdot v$.

Пример

- ▶ Определим функтор $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$, такой что $F(n) = \mathbb{R}^n$ и $F(A)(v) = A \cdot v$.
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указанным выше способом.

Пример

- ▶ Определим функтор $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$, такой что $F(n) = \mathbb{R}^n$ и $F(A)(v) = A \cdot v$.
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указанным выше способом.
- ▶ Таким образом, этот функтор полный и строгий.

Пример

- ▶ Определим функтор $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$, такой что $F(n) = \mathbb{R}^n$ и $F(A)(v) = A \cdot v$.
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указанным выше способом.
- ▶ Таким образом, этот функтор полный и строгий.
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что любое конечномерное векторное пространство V изоморфно пространству $\mathbb{R}^{dim(V)}$.

Пример

- ▶ Определим функтор $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$, такой что $F(n) = \mathbb{R}^n$ и $F(A)(v) = A \cdot v$.
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указанным выше способом.
- ▶ Таким образом, этот функтор полный и строгий.
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что любое конечномерное векторное пространство V изоморфно пространству $\mathbb{R}^{dim(V)}$.
- ▶ Таким образом, F – существенно сюръективен на объектах, и, следовательно, является эквивалентностью.

Доказательство

Proposition

Функтор является эквивалентностью тогда и только тогда, когда он полный, строгий и существенно сюръективен на объектах.

Доказательство.

Пусть $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ – эквивалентность категорий. Пусть $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ – обратный к нему, $\alpha : G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$ и $\beta : F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$. Тогда F – существенно сюръективен на объектах.

Действительно, для любого $X \in Ob(\mathbf{D})$ возьмём $Y = G(X)$, тогда $\beta_X : F(G(X)) \simeq X$.

Покажем, что F – строгий. Пусть $F(f) = F(f')$ для некоторых $f, f' : X \rightarrow Y$. Тогда по естественности α получается, что $f = \alpha_Y \circ G(F(f)) \circ \alpha_X^{-1} = \alpha_Y \circ G(F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = f'$. Аналогично доказывается, что G – строгий.



Доказательство (продолжение)

Докажем, что F – полный. Пусть $h : F(X) \rightarrow F(Y)$ – некоторая стрелка. Тогда определим стрелку $f : X \rightarrow Y$ как следующую композицию:

$$X \xrightarrow{\alpha_X^{-1}} G(F(X)) \xrightarrow{G(h)} G(F(Y)) \xrightarrow{\alpha_Y} Y$$

Тогда $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(h)$. С другой стороны, по естественности α у нас есть равенство $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(F(f))$. Следовательно $G(h) = G(F(f))$. По строгости G мы получаем, что $h = F(f)$. Таким образом, f – прообраз h , то есть F – полный.

Доказательство (в обратную сторону)

Пусть F – полный, строгий и существенно сюръективен на объектах. Тогда для любого $X \in Ob(\mathbf{D})$ существует объект $Y \in Ob(\mathbf{C})$ и изоморфизм $\alpha_X : F(Y) \simeq X$. Определим $G : Ob(\mathbf{D}) \rightarrow Ob(\mathbf{C})$ как функцию, возвращающую на каждом X такой Y (не важно какой конкретно).

$$\begin{array}{ccc}
 F(G(X)) & \xrightarrow{\alpha_X} & X \\
 \downarrow F(f') & & \downarrow f \\
 F(G(Y)) & \xrightarrow{\alpha_Y} & Y
 \end{array}$$

Так как F полон, то для каждого $f : X \rightarrow Y$ существует $f' : G(X) \rightarrow G(Y)$, такая что $F(f') = \alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X$. Так как F строг, то такая стрелка уникальна. Пусть $G(f) = f'$. Используя уникальность, легко проверить, что G сохраняет тождественные морфизмы и композиции.

Доказательство (продолжение)

Осталось проверить, что $G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$ и $F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$.

Преобразование $\alpha_X : F(G(X)) \simeq X$ естественно, так как коммутативный квадрат на предыдущем слайде – в точности квадрат естественности α .

Так как F – полный, то для любой стрелки

$\alpha_{F(Y)} : F(G(F(Y))) \rightarrow F(Y)$ существует прообраз

$\beta_Y : G(F(Y)) \rightarrow Y$. Все β_Y – изоморфизмы, так как обратные к ним – это прообразы $\alpha_{F(Y)}^{-1} : F(Y) \rightarrow F(G(F(Y)))$.

Доказательство (окончание)

Осталось проверить, что β естественен.

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{\beta_X} & X \\ G(F(f)) \downarrow & & \downarrow f \\ G(F(Y)) & \xrightarrow{\beta_Y} & Y \end{array}$$

Применив F к диаграмме выше, она начинает коммутировать, так как α естественен. Но так как F – строгий, исходная диаграмма также коммутирует.