

# Теория категорий

Функторы и естественные преобразования

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

# План лекции

Функторы

Подкатегории

Естественные преобразования

## Определение функторов

- ▶ Функторы между категориями **C** и **D** – это морфизмы категорий.

## Определение функторов

- ▶ Функторы между категориями **C** и **D** – это морфизмы категорий.
- ▶ Функтор  $F$  состоит из функции  $F : Ob(\mathbf{C}) \rightarrow Ob(\mathbf{D})$  и функций  $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  для всех  $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$ .

## Определение функторов

- ▶ Функторы между категориями **C** и **D** – это морфизмы категорий.
- ▶ Функтор  $F$  состоит из функции  $F : Ob(\mathbf{C}) \rightarrow Ob(\mathbf{D})$  и функций  $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  для всех  $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$ .
- ▶ Эти функции должны сохранять тождественные морфизмы и композиции:

$$F(id_X) = id_{F(X)}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

# Забывающие функторы

- ▶ Забывающий функтор  $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ , сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.

## Забывающие функторы

- ▶ Забывающий функтор  $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ , сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- ▶ Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$ ,  $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$ , и так далее.

## Забывающие функторы

- ▶ Забывающий функтор  $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ , сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- ▶ Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$ ,  $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$ , и так далее.
- ▶ Можно задавать функторы, которые забывают не всю информацию.

## Забывающие функторы

- ▶ Забывающий функтор  $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ , сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- ▶ Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$ ,  $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$ , и так далее.
- ▶ Можно задавать функторы, которые забывают не всю информацию.
- ▶ Например, существует два забывающих функтора  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Grp}$  и  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

## Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.

## Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- ▶ Если  $M$  и  $N$  – пара моноидов, и  $\mathbf{C}_M$  и  $\mathbf{C}_N$  – категории на одном объекте, соответствующие этим моноидам, то функторы между  $\mathbf{C}_M$  и  $\mathbf{C}_N$  – это в точности гомоморфизмы моноидов  $M$  и  $N$ .

## Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- ▶ Если  $M$  и  $N$  – пара моноидов, и  $\mathbf{C}_M$  и  $\mathbf{C}_N$  – категории на одном объекте, соответствующие этим моноидам, то функторы между  $\mathbf{C}_M$  и  $\mathbf{C}_N$  – это в точности гомоморфизмы моноидов  $M$  и  $N$ .
- ▶ Пусть  $\mathbf{C}$  – декартова категория и  $A$  – объект  $\mathbf{C}$ , тогда  $A \times - : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  – функтор, сопоставляющий каждому объекту  $B$  объект  $A \times B$  и каждому морфизму  $f : B \rightarrow B'$  морфизм  $id_A \times f : A \times B \rightarrow A \times B'$ .

## Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- ▶ Если  $M$  и  $N$  – пара моноидов, и  $\mathbf{C}_M$  и  $\mathbf{C}_N$  – категории на одном объекте, соответствующие этим моноидам, то функторы между  $\mathbf{C}_M$  и  $\mathbf{C}_N$  – это в точности гомоморфизмы моноидов  $M$  и  $N$ .
- ▶ Пусть  $\mathbf{C}$  – декартова категория и  $A$  – объект  $\mathbf{C}$ , тогда  $A \times - : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  – функтор, сопоставляющий каждому объекту  $B$  объект  $A \times B$  и каждому морфизму  $f : B \rightarrow B'$  морфизм  $id_A \times f : A \times B \rightarrow A \times B'$ .
- ▶ “Существует” очевидный функтор  $I : \mathbf{Hask}_{total} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

## Примеры функторов

- ▶ Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- ▶ Если  $M$  и  $N$  – пара моноидов, и  $\mathbf{C}_M$  и  $\mathbf{C}_N$  – категории на одном объекте, соответствующие этим моноидам, то функторы между  $\mathbf{C}_M$  и  $\mathbf{C}_N$  – это в точности гомоморфизмы моноидов  $M$  и  $N$ .
- ▶ Пусть  $\mathbf{C}$  – декартова категория и  $A$  – объект  $\mathbf{C}$ , тогда  $A \times - : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  – функтор, сопоставляющий каждому объекту  $B$  объект  $A \times B$  и каждому морфизму  $f : B \rightarrow B'$  морфизм  $id_A \times f : A \times B \rightarrow A \times B'$ .
- ▶ “Существует” очевидный функтор  $I : \mathbf{Hask}_{total} \rightarrow \mathbf{Set}$ .
- ▶ “Функторам” в хаскелле соответствуют функторы  $\mathbf{Hask} \rightarrow \mathbf{Hask}$ .

## Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории  $\mathbf{C}$  существует тождественный функтор  $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , отправляющий каждый объект и морфизм в себя.

## Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории  $\mathbf{C}$  существует тождественный функтор  $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- ▶ Если  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  и  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ , то функтор  $G \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$  определяется на объектах и на морфизмах как композиция  $F$  и  $G$ .

## Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории  $\mathbf{C}$  существует тождественный функтор  $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- ▶ Если  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  и  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ , то функтор  $G \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$  определяется на объектах и на морфизмах как композиция  $F$  и  $G$ .
- ▶ Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.

## Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории  $\mathbf{C}$  существует тождественный функтор  $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- ▶ Если  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  и  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ , то функтор  $G \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$  определяется на объектах и на морфизмах как композиция  $F$  и  $G$ .
- ▶ Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называется *изоморфизмом* категорий, если существует функтор  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  такой, что  $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$  и  $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$ .

## Изоморфные категории

- ▶ Для любой категории  $\mathbf{C}$  существует тождественный функтор  $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- ▶ Если  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  и  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ , то функтор  $G \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$  определяется на объектах и на морфизмах как композиция  $F$  и  $G$ .
- ▶ Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называется *изоморфизмом* категорий, если существует функтор  $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  такой, что  $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$  и  $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$ .
- ▶ Категории  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  *изоморфны*, если существует изоморфизм  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ .

# Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  можно определить понятие предела  $\lim F$  и копредела  $\operatorname{colim} F$ . Определение такое же как и для диаграмм.

## Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  можно определить понятие предела  $\lim F$  и копредела  $\operatorname{colim} F$ . Определение такое же как и для диаграмм.
- ▶ Категории  $\mathbf{J}$  можно рассматривать как обобщение графов, а функтор  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  – как обобщение диаграмм в  $\mathbf{C}$ .

## Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  можно определить понятие предела  $\lim F$  и копредела  $\operatorname{colim} F$ . Определение такое же как и для диаграмм.
- ▶ Категории  $\mathbf{J}$  можно рассматривать как обобщение графов, а функтор  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  – как обобщение диаграмм в  $\mathbf{C}$ .
- ▶ Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимообратные)

## Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  можно определить понятие предела  $\lim F$  и копредела  $\operatorname{colim} F$ . Определение такое же как и для диаграмм.
- ▶ Категории  $\mathbf{J}$  можно рассматривать как обобщение графов, а функтор  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  – как обобщение диаграмм в  $\mathbf{C}$ .
- ▶ Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимообратные)
- ▶ Но пределы и копределы соответствующих диаграмм и функторов будут совпадать.

## Пределы и копределы функторов

- ▶ Для любого функтора  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  можно определить понятие предела  $\lim F$  и копредела  $\operatorname{colim} F$ . Определение такое же как и для диаграмм.
- ▶ Категории  $\mathbf{J}$  можно рассматривать как обобщение графов, а функтор  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  – как обобщение диаграмм в  $\mathbf{C}$ .
- ▶ Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимообратные)
- ▶ Но пределы и копределы соответствующих диаграмм и функторов будут совпадать.
- ▶ Функторы  $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  тоже называют диаграммами.

# План лекции

Функторы

Подкатегории

Естественные преобразования

## Подкатегории

- ▶ Подкатегория  $\mathbf{C}'$  категории  $\mathbf{C}$  – это подкласс объектов  $\mathbf{C}$  и для каждой пары объектов  $X, Y$  в  $\mathbf{C}'$  подкласс множества  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  такие, что  $\mathbf{C}'$  содержит тождественные морфизмы для любого  $X \in \mathbf{C}'$  и замкнут относительно композиции.

## Подкатегории

- ▶ Подкатегория  $\mathbf{C}'$  категории  $\mathbf{C}$  – это подкласс объектов  $\mathbf{C}$  и для каждой пары объектов  $X, Y$  в  $\mathbf{C}'$  подкласс множества  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  такие, что  $\mathbf{C}'$  содержит тождественные морфизмы для любого  $X \in \mathbf{C}'$  и замкнут относительно композиции.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называется строгим (*faithful*), если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  функция  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  инъективна.

## Подкатегории

- ▶ Подкатегория  $\mathbf{C}'$  категории  $\mathbf{C}$  – это подкласс объектов  $\mathbf{C}$  и для каждой пары объектов  $X, Y$  в  $\mathbf{C}'$  подкласс множества  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  такие, что  $\mathbf{C}'$  содержит тождественные морфизмы для любого  $X \in \mathbf{C}'$  и замкнут относительно композиции.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называется строгим (*faithful*), если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  функция  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  инъективна.
- ▶ Подкатегории категории  $\mathbf{C}$  – классы эквивалентности строгих инъективных на объектах функторов.

## Подкатегории

- ▶ Подкатегория  $\mathbf{C}'$  категории  $\mathbf{C}$  – это подкласс объектов  $\mathbf{C}$  и для каждой пары объектов  $X, Y$  в  $\mathbf{C}'$  подкласс множества  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  такие, что  $\mathbf{C}'$  содержит тождественные морфизмы для любого  $X \in \mathbf{C}'$  и замкнут относительно композиции.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называется строгим (*faithful*), если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  функция  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  инъективна.
- ▶ Подкатегории категории  $\mathbf{C}$  – классы эквивалентности строгих инъективных на объектах функторов.
- ▶ Проблема этого определения заключается в том, что оно не стабильно относительно изоморфизмов объектов  $\mathbf{C}$  (то есть,  $X$  может принадлежать  $\mathbf{C}'$ , а изоморфный ему объект  $Y$  – нет).

## Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория  $\mathbf{C}'$  категории  $\mathbf{C}$  называется *полной*, если для любых объектов  $X, Y$  в  $\mathbf{C}'$  множества  $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$  и  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  равны.

## Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория  $\mathbf{C}'$  категории  $\mathbf{C}$  называется *полной*, если для любых объектов  $X, Y$  в  $\mathbf{C}'$  множества  $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$  и  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  равны.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называется *полным*, если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  функция  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  сюръективна.

## Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория  $\mathbf{C}'$  категории  $\mathbf{C}$  называется *полной*, если для любых объектов  $X, Y$  в  $\mathbf{C}'$  множества  $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$  и  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  равны.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называется *полным*, если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  функция  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  сюръективна.
- ▶ Полные подкатегории категории  $\mathbf{C}$  – классы эквивалентности полных строгих функторов.

## Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория  $\mathbf{C}'$  категории  $\mathbf{C}$  называется *полной*, если для любых объектов  $X, Y$  в  $\mathbf{C}'$  множества  $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$  и  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  равны.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называется *полным*, если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  функция  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  сюръективна.
- ▶ Полные подкатегории категории  $\mathbf{C}$  – классы эквивалентности полных строгих функторов.
- ▶ Теперь необязательно требовать инъективность на объектах.

## Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория  $\mathbf{C}'$  категории  $\mathbf{C}$  называется *полной*, если для любых объектов  $X, Y$  в  $\mathbf{C}'$  множества  $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$  и  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  равны.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называется *полным*, если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  функция  $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$  сюръективна.
- ▶ Полные подкатегории категории  $\mathbf{C}$  – классы эквивалентности полных строгих функторов.
- ▶ Теперь необязательно требовать инъективность на объектах.
- ▶ Полные строгие функторы мы будем называть *вложениями* категорий.

# Примеры

- ▶  $\mathbf{Set}_{fin}$  – полная подкатегория  $\mathbf{Set}$ .

# Примеры

- ▶  $\mathbf{Set}_{fin}$  – полная подкатегория  $\mathbf{Set}$ .
- ▶  $\mathbf{Ab}$  – полная подкатегория  $\mathbf{Grp}$ .

## Примеры

- ▶  $\mathbf{Set}_{fin}$  – полная подкатегория  $\mathbf{Set}$ .
- ▶  $\mathbf{Ab}$  – полная подкатегория  $\mathbf{Grp}$ .
- ▶ “Существует” не полное вложение  $\mathbf{Hask}_{total}$  в  $\mathbf{Set}$ .

## Примеры

- ▶  $\mathbf{Set}_{fin}$  – полная подкатегория  $\mathbf{Set}$ .
- ▶  $\mathbf{Ab}$  – полная подкатегория  $\mathbf{Grp}$ .
- ▶ “Существует” не полное вложение  $\mathbf{Hask}_{total}$  в  $\mathbf{Set}$ .
- ▶ Все забывающий функторы, которые мы рассматривали, являются строгими.

# План лекции

Функторы

Подкатегории

Естественные преобразования

## Определение

- ▶ Можно определить понятие морфизма между функторами  $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ .

## Определение

- ▶ Можно определить понятие морфизма между функторами  $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ .
- ▶ Естественное преобразование  $\alpha : F \rightarrow G$  – это функция, сопоставляющая каждому объекту  $X$  из  $\mathbf{C}$  морфизм  $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$ , удовлетворяющая условию, что для любого морфизма  $f : X \rightarrow Y$  в  $\mathbf{C}$  следующий квадрат коммутирует:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) \end{array}$$

## Категория функторов

- ▶ Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.

## Категория функторов

- ▶ Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.
- ▶ Если  $\alpha : F \rightarrow G$  – естественное преобразование, то каждому морфизму  $f : X \rightarrow Y$  в **C** можно сопоставить морфизм  $\alpha_f : F(X) \rightarrow G(Y)$  в **D**.

## Категория функторов

- ▶ Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.
- ▶ Если  $\alpha : F \rightarrow G$  – естественное преобразование, то каждому морфизму  $f : X \rightarrow Y$  в **C** можно сопоставить морфизм  $\alpha_f : F(X) \rightarrow G(Y)$  в **D**.
- ▶ Морфизм  $\alpha_f$  определяется как композиция  $F(f) \circ \alpha_X$ , что равно  $\alpha_Y \circ G(f)$  по естественности.

## Категория функторов

- ▶ Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.
- ▶ Если  $\alpha : F \rightarrow G$  – естественное преобразование, то каждому морфизму  $f : X \rightarrow Y$  в **C** можно сопоставить морфизм  $\alpha_f : F(X) \rightarrow G(Y)$  в **D**.
- ▶ Морфизм  $\alpha_f$  определяется как композиция  $F(f) \circ \alpha_Y$ , что равно  $\alpha_X \circ G(f)$  по естественности.
- ▶ Этот морфизм – это диагональ в коммутативном квадрате, который появляется в определении естественности.

## Композиция естественных преобразований

- ▶ Если  $\alpha : F \rightarrow G$  и  $\beta : G \rightarrow H$  – пара естественных преобразований, то можно определить их композицию  $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H$  как функцию, сопоставляющую каждому  $X$  из  $\mathbf{C}$  морфизм  $\beta_X \circ \alpha_X : F(X) \rightarrow H(X)$ .

## Композиция естественных преобразований

- ▶ Если  $\alpha : F \rightarrow G$  и  $\beta : G \rightarrow H$  – пара естественных преобразований, то можно определить их композицию  $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H$  как функцию, сопоставляющую каждому  $X$  из  $\mathbf{C}$  морфизм  $\beta_X \circ \alpha_X : F(X) \rightarrow H(X)$ .
- ▶ Композиция  $\beta \circ \alpha$  – естественна:

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) & \xrightarrow{\beta_X} & H(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) & \xrightarrow{\beta_Y} & H(Y) \end{array}$$

## Категория функторов

- ▶ Для любого функтора  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  существует тождественное естественное преобразование, сопоставляющее каждому  $X$  тождественный морфизм  $\text{id}_{F(X)} : F(X) \rightarrow F(X)$ .

## Категория функторов

- ▶ Для любого функтора  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  существует тождественное естественное преобразование, сопоставляющее каждому  $X$  тождественный морфизм  $\text{id}_{F(X)} : F(X) \rightarrow F(X)$ .
- ▶ Композиция – ассоциативна, тождественное преобразование является единицей для композиции.

## Категория функторов

- ▶ Для любого функтора  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  существует тождественное естественное преобразование, сопоставляющее каждому  $X$  тождественный морфизм  $\text{id}_{F(X)} : F(X) \rightarrow F(X)$ .
- ▶ Композиция – ассоциативна, тождественное преобразование является единицей для композиции.
- ▶ Таким образом, для любой пары категорий  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  существует категория функторов, которая обозначается  $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ .

## Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называются *эквивалентностью* категорий, если существует функтор  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ , такой что  $G \circ F$  изоморфен  $Id_{\mathbf{C}}$  в категории  $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$ , и  $F \circ G$  изоморфен  $Id_{\mathbf{D}}$  в категории  $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$ .

## Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называются *эквивалентностью* категорий, если существует функтор  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ , такой что  $G \circ F$  изоморфен  $Id_{\mathbf{C}}$  в категории  $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$ , и  $F \circ G$  изоморфен  $Id_{\mathbf{D}}$  в категории  $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$ .
- ▶ Категории **C** и **D** называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ .

## Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называются *эквивалентностью* категорий, если существует функтор  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ , такой что  $G \circ F$  изоморфен  $Id_{\mathbf{C}}$  в категории  $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$ , и  $F \circ G$  изоморфен  $Id_{\mathbf{D}}$  в категории  $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$ .
- ▶ Категории **C** и **D** называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ .
- ▶ Чтобы убедиться, что функтор является эквивалентностью, нужно проверять много условий.

## Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называются *эквивалентностью* категорий, если существует функтор  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ , такой что  $G \circ F$  изоморфен  $Id_{\mathbf{C}}$  в категории  $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$ , и  $F \circ G$  изоморфен  $Id_{\mathbf{D}}$  в категории  $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$ .
- ▶ Категории **C** и **D** называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ .
- ▶ Чтобы убедиться, что функтор является эквивалентностью, нужно проверять много условий.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  является эквивалентностью, если он полный, строгий и *существенно сюръективен на объектах*.

## Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  называются *эквивалентностью* категорий, если существует функтор  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ , такой что  $G \circ F$  изоморфен  $Id_{\mathbf{C}}$  в категории  $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$ , и  $F \circ G$  изоморфен  $Id_{\mathbf{D}}$  в категории  $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$ .
- ▶ Категории **C** и **D** называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ .
- ▶ Чтобы убедиться, что функтор является эквивалентностью, нужно проверять много условий.
- ▶ Функтор  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  является эквивалентностью, если он полный, строгий и *существенно сюръективен на объектах*.
- ▶ Последнее условие означает, что для любого объекта  $X$  в **D** существует объект  $Y$  в **C**, такой что  $F(Y)$  изоморфен  $X$ .

## Пример

- ▶ Определим функтор  $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$ , такой что  $F(n) = \mathbb{R}^n$  и  $F(A)(v) = A \cdot v$ .

## Пример

- ▶ Определим функтор  $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$ , такой что  $F(n) = \mathbb{R}^n$  и  $F(A)(v) = A \cdot v$ .
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указанным выше способом.

## Пример

- ▶ Определим функтор  $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$ , такой что  $F(n) = \mathbb{R}^n$  и  $F(A)(v) = A \cdot v$ .
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указанным выше способом.
- ▶ Таким образом, этот функтор полный и строгий.

## Пример

- ▶ Определим функтор  $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$ , такой что  $F(n) = \mathbb{R}^n$  и  $F(A)(v) = A \cdot v$ .
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указанным выше способом.
- ▶ Таким образом, этот функтор полный и строгий.
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что любое конечномерное векторное пространство  $V$  изоморфно пространству  $\mathbb{R}^{\dim(V)}$ .

## Пример

- ▶ Определим функтор  $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$ , такой что  $F(n) = \mathbb{R}^n$  и  $F(A)(v) = A \cdot v$ .
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указанным выше способом.
- ▶ Таким образом, этот функтор полный и строгий.
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что любое конечномерное векторное пространство  $V$  изоморфно пространству  $\mathbb{R}^{\dim(V)}$ .
- ▶ Таким образом,  $F$  – существенно сюръективен на объектах, и, следовательно, является эквивалентностью.

## Доказательство

### Proposition

*Функтор является эквивалентностью тогда и только тогда, когда он полный, строгий и существенно сюръективен на объектах.*

#### Доказательство.

Пусть  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  – эквивалентность категорий. Пусть

$G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  – обратный к нему,  $\alpha : G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$  и  $\beta : F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$ .

Тогда  $F$  – существенно сюръективен на объектах.

Действительно, для любого  $X \in Ob(\mathbf{D})$  возьмём  $Y = G(X)$ , тогда  $\beta_X : F(G(X)) \simeq X$ .

Покажем, что  $F$  – строгий. Пусть  $F(f) = F(f')$  для некоторых  $f, f' : X \rightarrow Y$ . Тогда по естественности  $\alpha$  получается, что  $f = \alpha_Y \circ G(F(f)) \circ \alpha_X^{-1} = \alpha_Y \circ G(F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = f'$ . Аналогично доказывается, что  $G$  – строгий.

## Доказательство (продолжение)

Докажем, что  $F$  – полный. Пусть  $h : F(X) \rightarrow F(Y)$  – некоторая стрелка. Тогда определим стрелку  $f : X \rightarrow Y$  как следующую композицию:

$$X \xrightarrow{\alpha_X^{-1}} G(F(X)) \xrightarrow{G(h)} G(F(Y)) \xrightarrow{\alpha_Y} Y$$

Тогда  $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(h)$ . С другой стороны, по естественности  $\alpha$  у нас есть равенство  $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(F(f))$ . Следовательно  $G(h) = G(F(f))$ . По строгости  $G$  мы получаем, что  $h = F(f)$ . Таким образом,  $f$  – прообраз  $h$ , то есть  $F$  – полный.

## Доказательство (в обратную сторону)

Пусть  $F$  – полный, строгий и существенно сюръективен на объектах. Тогда для любого  $X \in Ob(\mathbf{D})$  существует объект  $Y \in Ob(\mathbf{C})$  и изоморфизм  $\alpha_X : F(Y) \simeq X$ . Определим  $G : Ob(\mathbf{D}) \rightarrow Ob(\mathbf{C})$  как функцию, возвращающую на каждом  $X$  такой  $Y$  (не важно какой конкретно).

$$\begin{array}{ccc} F(G(X)) & \xrightarrow{\alpha_X} & X \\ | & & \downarrow f \\ F(f') | & & \\ \Downarrow & & \\ F(G(Y)) & \xrightarrow{\alpha_Y} & Y \end{array}$$

Так как  $F$  полон, то для каждого  $f : X \rightarrow Y$  существует  $f' : G(X) \rightarrow G(Y)$ , такая что  $F(f') = \alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X$ . Так как  $F$  строг, то такая стрелка уникальна. Пусть  $G(f) = f'$ . Используя уникальность, легко проверить, что  $G$  сохраняет тождественные морфизмы и композиции.

## Доказательство (продолжение)

Осталось проверить, что  $G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$  и  $F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$ .

Преобразование  $\alpha_X : F(G(X)) \simeq X$  естественно, так как коммутативный квадрат на предыдущем слайде – в точности квадрат естественности  $\alpha$ .

Так как  $F$  – полный, то для любой стрелки

$\alpha_{F(Y)} : F(G(F(Y))) \rightarrow F(Y)$  существует прообраз

$\beta_Y : G(F(Y)) \rightarrow Y$ . Все  $\beta_Y$  – изоморфизмы, так как обратные к ним – это прообразы  $\alpha_{F(Y)}^{-1} : F(Y) \rightarrow F(G(F(Y)))$ .

## Доказательство (окончание)

Осталось проверить, что  $\beta$  естественен.

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{\beta_X} & X \\ G(F(f)) \downarrow & & \downarrow f \\ G(F(Y)) & \xrightarrow{\beta_Y} & Y \end{array}$$

Применив  $F$  к диаграмме выше, она начинает коммутировать, так как  $\alpha$  естественен. Но так как  $F$  – строгий, исходная диаграмма также коммутирует.