Умеренно низкие и супернизкие множества

Илья Власов
Казанский (Приволжский) федеральный университет

Аннотация

В данной работе изучаются свойства подкласса низких множеств — умеренно низких множеств. Было показано, что данный класс отличен от супернизких и низких множеств, причем даже на в.п. множествах. В данных доказательствах применяется модифицированный метод приоритета с конечными нарушениями. Также было доказано свойство незамкнутости вниз относительно тьюринговой сводимости для умеренно низких множеств.

1 Введение

Умеренно низкие множества возникли как обобщение супернизких в связи с вопросами алгоритмической случайности. Класс был введен Кучерой и Ниисом, изначально ими был получен следующий результат:

Теорема. *Существует K-тривиальное множество, которое невычислимо относительно любого умеренно низкого ML-случайного множества.*

Но затем этот результат был усилен [1]:

Теорема. *Существует K-тривиальное множество, которое невычислимо относительно любого низкого ML-случайного множества.*

Изучение умеренно низких множеств приводит к дальнейшим обобщениям супернизких множеств и направлению возможной классификации низких множеств.

Целью работы было доказать два утверждения: что существует вычислимо перечислимое низкое множество, которое не является умеренно низким; и что существует вычислимо перечислимое умеренно низкое множество, не являющееся супернизким. Оба указанные множества строятся с помощью метода приоритета с конечными нарушениями.

При построении умеренно низкого не супернизкого множества возникает трудность, которая обходится с помощью модификации метода приоритета. Эта модификация заключается в том, что требования с большим приоритетом могут «блокировать» (о точном смысле этого термина будет сказано ниже) некоторые требования с меньшим приоритетом. Разработанная техника позволила доказать, что класс умеренно низких множеств незамкнут вниз относительно тьюринговой сводимости.

2 Основные определения и обозначения

Обозначаем множество всех натуральных чисел через $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Далее рассматриваем только множества натуральных чисел. Обозначаем через $\langle x, y\rangle$ стандартную функцию пары $\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y)$ биективно отображающую ω^2 на ω, через π_1, π_2 обозначим функции такие, что $\langle \pi_1(x), \pi_2(x)\rangle = x$ для любого x. Каноническим индексом конечного множества $\{x_1 < x_2 < \dots <$

$x_n\}$ называем число $2^{x_1} + \ldots + 2^{x_n}$, канонический индекс пустого множества считаем равным 0, D_y — конечное множество с каноническим индексом y.

Фиксируем некоторые эффективные нумерации всех частично вычислимых функций и всех тьюринговых функционалов, обозначаем через φ_e e-ю частично вычислимую функцию, через Φ_e^A — e-й тьюринговый функционал с оракулом A при этих нумерациях. Определяем $\Phi_{e,s}^A(x)$ следующим образом:

$$\Phi_{e,s}^A(x) = \begin{cases} \Phi_e^A(x), \text{ если } e, x < s \text{ и } \Phi_e^A \text{ завершает работу за } < s \text{ шагов на входе } x, \\ \text{не определено, иначе.} \end{cases}$$

Аналогично определяется $\varphi_{e,s}$.

Через $\mathrm{u}(A; e, x, s)$ обозначаем 1+наибольшее число, вопрос о принадлежности множеству A которого задавался при вычислении $\Phi_{e,s}^A(x)$, если $\Phi_{e,s}^A(x)$ определено, и ноль, если $\Phi_{e,s}^A(x)$ не определено. Полагаем $W_e = \mathrm{dom}\,\varphi_e$, $W_e^A = \mathrm{dom}\,\Phi_e^A$ — обозначения для вычислимо перечислимых (A-вычислимо перечислимых) множеств. Скачком множества A называем множество $A' = \{e\colon e \in W_e^A\}$.

Перейдем к основным определениям этой работы.

Определение 1. *Множество A — низкое, если $A' \leq_T \emptyset'$.*

$$Low = \{A \subseteq \omega\colon A \text{ — низкое}\}.$$

Определение 2. *Множество A — супернизкое, если существуют вычислимая последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ и вычислимая функция g такие, что $A' = \lim_s f_s$ и $|\{s\colon f_s(x) \neq f_{s+1}(x)\}| \leq g(x)$, для любого x.*

$$SL = \{A \subseteq \omega\colon A \text{ — супернизкое}\}.$$

Определение 3. *Множество A — умеренно низкое, если существуют вычислимая последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ и A-вычислимая функция g такие, что $A' = \lim_s f_s$ и $|\{s\colon f_s(x) \neq f_{s+1}(x)\}| \leq g(x)$, для любого x.*

$$FL = \{A \subseteq \omega\colon A \text{ — умеренно низкое}\}.$$

Можно отметить такие очевидные свойства этих классов множеств.

Предложение 1. $A \in Low \Leftrightarrow (\forall e)\ (\exists f \leq_T \emptyset)\ (\forall x)\ \big(W_e^A(x) = \lim_s f(x,s)\big)$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) A' — в.п. относительно A, следовательно, $A' = W_e^A$, для некоторого e. Поэтому $A' = \lim_s f_s$, для некоторой вычислимой последовательности $\{f_s\}_{s\in\omega}$. Тогда по лемме о пределе $A' \leq_T \emptyset'$.
($\Rightarrow$) $A' \equiv K_0^A = \{\langle x, y\rangle\colon x \in W_y^A\}$ и $A' = \lim_s f_s$, где $\{f_s\}_{s\in\omega}$ — вычислимая последовательность. Заметим, что $W_e^A \equiv (A')^{[e]}$, для любого e. Тогда $W_e^A(x) = \lim_s f_s(\langle x, e\rangle)$, для любого x. □

Следующие утверждения доказываются аналогично.

Предложение 2. $A \in SL \Leftrightarrow (\forall e)\,(\exists f \leq_T \emptyset)\,(\exists g \leq_T \emptyset)\,(\forall x)\,(W_e^A(x) = \lim_s f(x,s)\ \&\ |\{s\colon f(x,s) \neq f(x,s+1)\}| \leq g(x))$.

Предложение 3. $A \in FL \Leftrightarrow (\forall e)\,(\exists f \leq_T \emptyset)\,(\exists g \leq_T A)\,(\forall x)\,(W_e^A(x) = \lim_s f(x,s)\ \&\ |\{s\colon f(x,s) \neq f(x,s+1)\}| \leq g(x))$.

Очевидно, что имеют место следующие включения:

$$SL \subseteq FL \subseteq Low$$

В следующем разделе покажем, что эти включения собственные и достигаются на в.п. множествах.

3 $SL \subsetneq FL \subsetneq Low$

Начнем с более простого утверждения.

Теорема 1. *Существует низкое в.п. множество A, которое не является умеренно низким. (Т.е. $FL \subsetneq Low$).*

Доказательство. Будем строить в.п. множество A и в.п. относительно A множество B , удовлетворяя требованиям:

$$R_{\langle e,i\rangle} : \forall x\ (B(x) = \lim_s \varphi_e(x,s)) \Rightarrow \exists x\ (|\{s\colon \varphi_e(x,s) \neq \varphi_e(x,s+1)\}| > \Phi_i^A(x));$$

$$N_e : \exists^\infty s\ (\Phi_{e,s}^{A_s}(e)\downarrow) \Rightarrow \Phi_e^A(e)\downarrow.$$

Примем следующее приоритетное упорядочение требований:

$$N_0, R_0, N_1, R_1, \dots$$

Требования $R_{\langle e,i\rangle}$ обеспечат $A \notin FL$ по предложению 3. Требования N_e обеспечивают $A \in Low$.

Чтобы получить множество B, строим тьюрингов функционал Ψ^A и кладем $B = \operatorname{dom}\Psi^A$. Пусть $B_s = \operatorname{dom}\Psi_s^{A_s}$, $\psi^A(x,s)$ — use-функция $\Psi_s^{A_s}$, V_Ψ — множество аксиом функционала Ψ^A.

Для удовлетворения N_e на каждом шаге $s+1$ запрещаем (с приоритетом N_e) перечисление в A элементов $\leq \mathrm{u}(A_s; e, e, s)$.

Стратегия удовлетворения требования $R_{\langle e,i\rangle}$ заключается в следующем. К $R_{\langle e,i\rangle}$ прикрепляем свидетеля $x_{\langle e,i\rangle}$. Далее, ждем шага $s+1$ такого, что существует $l \leq s$ удовлетворяющий следующим условиям:

$$(\forall t \leq l)\ (\varphi_{e,s+1}(x_{\langle e,i\rangle}, l)\downarrow)$$

для наибольшего такого l:

$$B_s(x_{\langle e,i\rangle}) = \varphi_{e,s}(x_{\langle e,i\rangle}, l),$$

и

$$|\{t\colon t < l \,\&\, \varphi_e(x_{\langle e,i\rangle}, t) \neq \varphi_e(x_{\langle e,i\rangle}, t+1)\}| \leq \Phi_{i,s}^{A_s}(x_{\langle e,i\rangle})\downarrow$$

В случае, если такого шага не существует, то $R_{\langle e,i\rangle}$ автоматически удовлетворено. Пусть $s+1$ такой шаг, говорим, что $R_{\langle e,i\rangle}$ *требует внимания* на шаге $s+1$. Если $\varphi_e(x_{\langle e,i\rangle}, l) = 0$, то перечисляем $x_{\langle e,i\rangle}$ в B (определяем функционал $\Psi^A(x_{\langle e,i\rangle})$ так, что use $\psi^A(x_{\langle e,i\rangle}, s+1)$ больше запретов требований $N_0, \dots, N_{\langle e,i\rangle}$).

Если $\varphi_e(x_{\langle e,i\rangle}, l) = 1$, то перечисляем в A наименьший $y < \psi(x_{\langle e,i\rangle}, s)$ такой, что y не нарушает требования с большим приоритетом и делаем $\Psi^A(x_{\langle e,i\rangle})$ неопределенным. Если такого y не существует, то меняем свидетеля $x_{\langle e,i\rangle}$ (таких изменений должно быть конечное число). После каждого шага s требование $R_{\langle e,i\rangle}$ ставит запрет на перечисление в A элементов $\leq \mathrm{u}(A_s; i, x_{\langle e,i\rangle}, s)$.

В дальнейшей конструкции $x_{\langle e,i\rangle}^s \in \omega^{[\langle e,i\rangle]}$ — аппроксимация свидетеля требования $R_{\langle e,i\rangle}$ на шаге s. $x_{\langle e,i\rangle} = \lim_s x_{\langle e,i\rangle}^s$.

Определим запрещающую функцию для всех e, i, s следующим образом:

$$r(\langle e,i\rangle, s) = \max\{\mathrm{u}(A_s; \langle e,i\rangle, \langle e,i\rangle, s), \mathrm{u}(A_s; i, x_{\langle e,i\rangle}^s, s)\}.$$

<u>*Шаг* $s = 0$</u>. $A_0 = \emptyset$, $x_{\langle e,i\rangle}^0 = \langle 0, \langle e,i\rangle\rangle$, $V_{\Psi,0} = \emptyset$.

<u>*Шаг* $s+1$</u>.

Говорим, что требование $R_{\langle e,i\rangle}$ *требует внимания*, если существует такой $l \leq s$, что

1. $\varphi_{e,s}(x_{\langle e,i\rangle}^s, t)\downarrow$, для любого $t \leq l$;
2. $\Phi_{i,s}^{A_s}(x_{\langle e,i\rangle}^s)\downarrow$;

и для наибольшего такого l имеет место

3. $|\{t\colon t < l \,\&\, \varphi_{e,s}(x^s_{\langle e,i\rangle}, t) \neq \varphi_{e,s}(x^s_{\langle e,i\rangle}, t+1)\}| \leq \Phi^{A_s}_{i,s}(x^s_{\langle e,i\rangle})$;

4. $\varphi_{e,s}(x^s_{\langle e,i\rangle}, l) \downarrow = B_s(x^s_{\langle e,i\rangle})$.

Выберем наименьший $\langle e,i\rangle \leq s$ такой, что $R_{\langle e,i\rangle}$ требует внимания и выберем наибольший $l \leq s$. Пусть

$$r = \max\{r(j,s)\colon j \leq \langle e,i\rangle\}$$

Случай 1. Если $\varphi_{e,s}(x^s_{\langle e,i\rangle}, l) = 0$, то определяем $\Psi^A_{s+1}(x^s_{\langle e,i\rangle})$ с use-ом $\psi^A(x^s_{\langle e,i\rangle}, s+1) > r+1$, посредством перечисления в $V_{\Psi,s+1}$ соответствующей аксиомы, так, чтобы существовал $y < \psi^A(x^s_{\langle e,i\rangle}, s+1)$, удовлетворяющий условию

$$y > r \,\&\, y \notin A_s.$$

При этом свидетель не изменяется: $x^{s+1}_{\langle e,i\rangle} = x^s_{\langle e,i\rangle}$.

Случай 2. Если $\varphi_{e,s}(x^s_{\langle e,i\rangle}, l) = 1$, то делаем $\Psi^A(x^s_{\langle e,i\rangle})$ неопределенным, перечисляя в A_{s+1} наименьший $y < \psi^A(x^s_{\langle e,i\rangle}, s)$ такой, что $y > r$ и $y \notin A_s$. При этом, чтобы значения функционала на других свидетелях не изменились, если $\Psi^{A_s}(x^s_j)\downarrow$, $j \neq \langle e,i\rangle$, то кладем $\psi^A(x^s_j, s+1)$ достаточно большим и перечисляем в $V_{\Psi,s+1}$ тройку $\langle A_{s+1} \upharpoonright \psi^A(x^s_j, s+1), x^s_j, 1\rangle$. Если такого y не существует, то кладем

$$x^{s+1}_{\langle e,i\rangle} = \mu x(x \in \omega^{[\langle e,i\rangle]} \,\&\, x > x^s_{\langle e,i\rangle} \,\&\, x \notin B_{s+1}).$$

В любом случае кладем $x^{s+1}_j = x^s_j$, для любого $j \neq \langle e,i\rangle$.

На этом конструкция A и B завершается. Покажем, что эти множества удовлетворяют требованиям.

Лемма. *Для любого j требования R_j, N_j удовлетворяются, причем R_j получает внимание конечное число раз, и существует $r(j) = \lim_s r(j,s)$.*

Доказательство. Пусть для всех $k < j$ лемма выполняется. Пусть s — такой шаг, что $R_0, R_1, \ldots, R_{j-1}$ не получают внимания на шагах $\geq s$, $r(k,t) = r(k)$ для всех $k < j$ и $t \geq s$. Тогда $x^t_k = x^s_k = x_k$ для всех $k < j$ и $t \geq s$.

Докажем, что требование N_j удовлетворено. Если $\Phi^{A_t}_{j,t}(j)\downarrow$ для некоторого $t \geq s$, то на шагах $t' \geq t$ в A перечисляются только элементы $y > r(k,t') \geq \mathrm{u}(A_{t'}; j, j, t')$. Индукцией по $t' \geq t$ доказывается, что

$$(\forall t' \geq t)\ (A_{t'} \upharpoonright \mathrm{u}(A_{t'}; j, j, t') = A \upharpoonright \mathrm{u}(A_{t'}; j, j, t') \,\&\, \mathrm{u}(A_{t'}; j, j, t') = \mathrm{u}(A_t; j, j, t)).$$

Тогда $\Phi^A_j(j)\downarrow = \Phi^{A_t}_{j,t}(j)$ по use-принципу.

Пусть $j = \langle e,i\rangle$. Пусть $s' \geq s$ — такой шаг, что $\mathrm{u}(A_t; j, j, t) = \mathrm{u}(A_{s'}; j, j, s')$ для любого $t \geq s'$. Докажем, что существует $x_{\langle e,i\rangle} = \lim_s x^s_{\langle e,i\rangle}$. Если $R_{\langle e,i\rangle}$ не меняет свидетеля на шагах $\geq s'$, то $x_{\langle e,i\rangle} = x^s_{\langle e,i\rangle}$. Пусть на некотором шаге $t+1 \geq s'$ имеет место $x^{t+1}_{\langle e,i\rangle} \neq x^t_{\langle e,i\rangle}$, тогда $B_{t+1}(x^{t+1}_{\langle e,i\rangle}) = 0$. Если $R_{\langle e,i\rangle}$ получает внимание на шаге $\nu > t+1$, то для наименьшего такого ν имеет место: $\Phi^{A_\nu}_{i,\nu}(x^\nu_{\langle e,i\rangle})\downarrow$, свидетель $x^\nu_{\langle e,i\rangle} = x^{t+1}_{\langle e,i\rangle}$ перечисляется в B_ν, т.е. определяется функционал $\Psi^A(x^\nu_{\langle e,i\rangle})$ с достаточно большим use-ом $\psi^A(x^\nu_{\langle e,i\rangle}, \nu)$, который больше максимума всех запретов требований $N_0, R_0, \ldots, N_j, R_j$, и который дает возможность перечислить в A $y < \psi^A(x^\nu_{\langle e,i\rangle}, \nu)$ такой, что $y > r = \max\{r(0), \ldots, r(j-1), r(j,\nu)\}$, т.е. не возникнет ситуации, в которой необходимо будет изменить свидетеля, т.к. use-ы $\Phi^A_0(0), \ldots, \Phi^A_j(j)$ стабилизировались. На шагах $\geq \nu$ в A перечисляются элементы $> \mathrm{u}(A_\nu; i, x^{t+1}_{\langle e,i\rangle}, \nu)$, поэтому

$$A_\nu \upharpoonright \mathrm{u}(A_\nu; i, x^{t+1}_{\langle e,i\rangle}, \nu) = A \upharpoonright \mathrm{u}(A_\nu; i, x^{t+1}_{\langle e,i\rangle}, \nu)$$

и $r(\langle e,i\rangle,\nu')=r(\langle e,i\rangle,\nu)=r(\langle e,i\rangle)$ для всех $\nu'\geq\nu$. Таким образом имеет место

$$\Phi^{A_\nu}_{j,\nu}(j)=\Phi^A_j(j)$$

$$x_{\langle e,i\rangle}=x^{t+1}_{\langle e,i\rangle}=x^{\nu}_{\langle e,i\rangle},\ \text{для всех}\ \nu\geq t+1.$$

Докажем, что $R_{\langle e,i\rangle}$ удовлетворяется. Если на шагах $\geq s$ $R_{\langle e,i\rangle}$ не получает внимания, то оно удовлетворено, поэтому предположим, что $R_{\langle e,i\rangle}$ требует внимание на некотором шаге $\geq s$.

Пусть $y=\lim_s\varphi_e(x_{\langle e,i\rangle},s)<\infty$. Можем выбрать $s'\geq s$ так, что $x_{\langle e,i\rangle}=x^t_{\langle e,i\rangle}$, $\varphi_e(x_{\langle e,i\rangle},t)=y$ и $r(\langle e,i\rangle,t)=r(\langle e,i\rangle)$, для всех $t\geq s'$. Если на шаге $t+1\geq s'$ требование $R_{\langle e,i\rangle}$ получает внимание и существует l, $s'\leq l\leq t$ такое, что

$$\varphi_{e,t}(x_{\langle e,i\rangle},k)\downarrow,\ \text{для любого}\ k\leq l,$$

то в B перечисляется $x_{\langle e,i\rangle}$ (или из B извлекается $x_{\langle e,i\rangle}$), тем самым обеспечивая

$$B(x_{\langle e,i\rangle})\neq y.$$

Т.е. $R_{\langle e,i\rangle}$ удовлетворено и больше не получает внимания. Если такого шага не существует, то $R_{\langle e,i\rangle}$ автоматически удовлетворено.

Если $\lim_s\varphi_e(x_{\langle e,i\rangle},s)=\infty$, то выберем $s'\geq s$ так, что $x_{\langle e,i\rangle}=x^t_{\langle e,i\rangle}$ и $r(\langle e,i\rangle,t)=r(\langle e,i\rangle)$, для всех $t\geq s'$. Начиная с некоторого шага $t+1\geq s'$ число изменений в последовательности $\{\varphi_e(x_{\langle e,i\rangle},s)\}_{s\in\omega}$ будет превышать $\Phi^A_i(x_{\langle e,i\rangle})$, а, следовательно, $R_{\langle e,i\rangle}$ удовлетворено и не будет получать внимания на последующих шагах.

□

Теорема 2. *Существует умеренно низкое в.п. множество A, которое не является супернизким. (Т.е. $SL\subsetneq FL$).*

Доказательство. Строим в.п. множество A, тьюринговые функционалы Ψ^A и Θ^A, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$R_{\langle e,i\rangle}:\forall x\ (B(x)=\lim_s\varphi_e(x,s))\Rightarrow\exists x\ (|\{s\colon\varphi_e(x,s)\neq\varphi_e(x,s+1)\}|>\varphi_i(x));$$

$$N_e:|\{s\colon g(e,s)\neq g(e,s+1)\}|\leq\Theta^A(e),$$

где

$$B=\operatorname{dom}\Psi^A$$

и

$$g(e,s)=\begin{cases}1,\ e\in W^{A_s}_{e,s},\\ 0,\ \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Требования имеют следующие приоритеты:

$$N_0,R_0,N_1,\ldots$$

Пусть $\psi^A(x,s),\ \theta^A(x,s)$ — use-функции функционалов Ψ^A и Θ^A. $V_\Psi,\ V_\Theta$ — множества аксиом Ψ^A и Θ^A.

Функционал Θ^A должен быть всюду определенным. В ходе построения будем определять функционал Θ^A так, чтобы для любых s имело место

$$\forall e,j\ (e<j\leq s\Rightarrow\theta(e,s)<\theta(j,s))\qquad(1)$$

Определим запрещающую функцию

$$r(e,s) = \mathrm{u}(A_s; e, e, s).$$

Говорим, что требование N_e *блокирует* N_i на шаге $s+1$, если не существует $y < \theta^A(i,s)$ такого, что $y > r(e,s)$ и $y \notin A_s$. Если N_e блокирует N_i и $j < i$, то в силу (1) N_e блокирует N_j.

Перейдем к рассмотрению стратегии удовлетворения требований. Сначала будем предполагать, что активно только одно отрицательное требование N_0. Пусть на некотором шаге $\Phi_0^A(0)\downarrow$. Рассмотрим следующую конфигурацию требований:

$$N_0, R_0, N_1, N_2, \ldots, N_k, N_{k+1}, \tag{2}$$

где N_{k+1} — первое требование, которое не блокируется N_0. Проблема возникает, если при удовлетворении R_0 перечисляются значения меньше $\mathrm{u}(A_s; i, i, s)$, $0 \leq i \leq k$, тогда число изменений $g(i,s)$ может стать больше $\Theta^A(i)$. Чтобы изменить значение $\Theta^A(i)$, необходимо перечислить элемент меньше $\theta^A(i,s)$, но это повлечет нарушение требования N_0.

Опишем стратегию удовлетворения требований конфигурации (2). Как только $\Phi_0^A(0)$ определилось, прикрепляем к R_0 $k+1$ свидетелей: $x_0, \ldots, x_k$ («активным» свидетелем сперва будет x_0). Говорим, что R_0 требует внимание, если $\varphi_0(x_0)\downarrow, \varphi_0(x_1)\downarrow, \ldots, \varphi_0(x_k)\downarrow$, число изменений в последовательности $\varphi_0(x_i, s)$ не превосходит $\varphi_0(x_i)$, где x_i — активный свидетель R_0, и, начиная с некоторого t_0, для всех $t \geq s_0$ имеет место $\varphi_0(x_i, t) = B_s(x_i)$. Тогда, если $B_s(x_i) = 0$, определяем $\Psi^A(x_i)$ так, что бы существовал $y < \psi^A(x_i, s+1)$, $y > \max\{r(j,s)\colon j \leq k\}$ и $y \notin A_s$. Если $B_s(x_i) = 1$ и существует $y < \psi^A(x_i, s)$, $y > \max\{r(j,s)\colon j \leq k\}$ и $y \notin A_s$, то перечисляем y в A_{s+1}, тем самым делая $\Psi^A(x_i)$ неопределенным. В противном случае, в качестве активного свидетеля выбираем x_{i+1}.

Мы не можем сделать $\Psi^A(x_i)$ неопределенным, если для некоторого i, $1 \leq i \leq k$, $\Phi_i^A(i)$ определилось с use-ом большим $\psi^A(x_i, s)$. Такая ситуация может возникнуть не более k раз, поэтому свидетель x_{k+1} уже не изменится.

Чтобы требование N_{k+1} не нарушалось, когда $\varphi_0(x_0), \ldots, \varphi_0(x_k)$ определятся, увеличим $\Theta^A(k+1)$ на $\sum_{i=0}^{k} \varphi_0(x_i) + (k+1)$, т.к. с свидетелем x требование R_0 может перечислить не более $\left\lceil \frac{\varphi_0(x)}{2} \right\rceil$ элементов в A, следовательно, это повлечет изменений $g(k+1, s)$ не более, чем $\varphi_0(x)+1$. Для того, чтобы перечислить некоторый элемент меньше use-а $\Theta^A(k+1)$, может потребоваться нарушение требований $N_1, \ldots, N_k$. Здесь не возникает проблем потому, что мы можем изначально определить $\Theta^A(e)$, $1 \leq e \leq k$, с достаточно большим значением (допускающим одно нарушение).

Теперь рассмотрим стратегию удовлетворения совокупности всех требований. Пусть $h(\langle e,i\rangle, s)$ — канонический индекс множества свидетелей требования $R_{\langle e,i\rangle}$ после шага s. Обозначим через $w(\langle e,i\rangle, s)$ *активного свидетеля* требования $R_{\langle e,i\rangle}$ после шага s.

Для любого требования R_e, если на некотором шаге $s+1$ имеет место $\max\{r(i, s+1)\colon i \leq e\} \neq \max\{r(i,s)\colon i \leq e\}$, то выбираем новых, ранее не использованных, свидетелей для требования R_e. Также, чтобы для каждых заново выбранных свидетелей R_e была возможность один раз нарушить заблокированные требования, как было сделано выше, требуется изначально сделать значение $\Theta^A(x)$, $x \leq e$, достаточно большим. Дадим явное определение этих значений.

N_0: Ясно, что $\Theta^A(0) = 1$, т.к. N_0 никогда не нарушается.

N_1: $\Phi_1^A(1)$ может определиться независимо, затем R_0 может выбрать новых свидетелей из-за того, что $\Phi_0^A(0)$ определилось, и один раз нарушить N_1. Поэтому должно быть $\Theta^A(1) \geq 1+2 = 3$.

N_2: $\Phi_2^A(2)$ также может определиться независимо, затем может определиться $\Phi_1^A(1)$ и в следствие этого R_1 может нарушить N_2: получаем не более 3 изменения для N_2. Далее может определиться $\Phi_0^A(0)$, это повлечет выбор новых свидетелей для R_0, R_1 и последующее нарушение требований N_1, N_2 (еще 2 изменения для N_2 из-за R_0 и 2 из-за R_1). Т.к. N_1 было нарушено, то $\Phi_1^A(1)$ может определиться с другим use-ом и заставить R_1 выбрать новых свидетелей. Это повлечет еще одно

нарушение N_2. В итоге: $1 + 2 + (2 + 4)$.
N_3: Аналогично получаем, $1 + 2 + (2 + 4) + (2 + 4 + 6)$.
…
N_e: $1 + 2 + (2 + 4) + \ldots + (2 + 4 + 6 + \ldots + 2e)$.
Пусть теперь требуется выбрать новых свидетелей для требования R_e. Рассмотрим следующую конфигурацию:

$$N_0, \ldots, N_e, R_e, N_{e+1}, R_{e+1}, N_{e+2}, \ldots, N_{e+k}, R_{e+k}, N_{e+k+1}, \tag{3}$$

где N_{e+k+1} — первое требование, не заблокированное требованиями $N_0, \ldots, N_e$. Требуется выбрать свидетелей больше, чем $\Phi^A_{e+1}(e+1), \ldots, \Phi^A_{e+k}(e+k)$ могут увеличить свои use-ы. Аналогичным подсчетом получаем, что N_{e+i} может определиться $1+1+(1+2)+\ldots+(1+2+3+\ldots+(i-1))$ раз. Суммируем по всем $N_{e+1}, \ldots, N_{e+k}$ и берем свидетелей на единицу больше. Обозначим это число через $n(e, s)$.

Дальнейшая стратегия удовлетворения требования R_e в конфигурации (3) не отличается от стратегии для конфигурации (2).

Конструкция множества A и функционалов Ψ^A, Θ^A.

Шаг $s = 0$. Пусть $A_0 = V_{\Psi,0} = \emptyset$. Определим $\Theta^{A_0}(0) = 1$ с use-ом $\theta^A(0, 0) = 2$. Изначально к каждому требованию прикреплен один свидетель: $h(\langle e, i\rangle, 0) = 2^{\langle 0, \langle e,i\rangle\rangle}$ и $w(\langle e, i\rangle, 0) = \langle 0, \langle e, i\rangle\rangle$ для всех $\langle e, i\rangle$.

Шаг $s + 1$. Говорим, что $R_{\langle e,i\rangle}$ требует внимания, если существует $l \leq s$ такой, что

1. $\varphi_{i,s}(x)\downarrow$ для всех $x \in D_{h(\langle e,i\rangle,s)}$;

2. $\varphi_{e,s}(x, t)\downarrow$ для всех $x \in D_{h(\langle e,i\rangle,s)}$ и всех $t \leq l$;

и для наибольшего такого l имеет место:

3. $\varphi_{e,s}(w(\langle e, i\rangle, s), l) = B_s(w(\langle e, i\rangle, s))$;

4. $|\{t \colon t < l \ \&\ \varphi_{e,s}(w(\langle e, i\rangle, s), t) \neq \varphi_{e,s}(w(\langle e, i\rangle, s), t + 1)\}| \leq \varphi_{i,s}(w(\langle e, i\rangle, s))$.

Подшаг 1. Пусть $\langle e, i\rangle \leq s$ — наименьшее число такое, что $R_{\langle e,i\rangle}$ требует внимания (если такого не существует, то $A_{s+1} = A_s$ и переходим к подшагу 2). Пусть k — наименьшее такое, что $N_{\langle e,i\rangle+k+1}$ не заблокировано требованиями $N_0, \ldots, N_{\langle e,i\rangle}$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $B_s(w(\langle e, i\rangle, s)) = 1$. Если для текущего $h(\langle e, i\rangle, s)$ мы еще не изменили значение $\Theta^A(\langle e, i\rangle+k+1)$, то перечисляем в A_{s+1} наименьший $y > \max\{r(j, s) \colon j \leq \langle e, i\rangle\}$, тем самым нарушая use-ы $\Theta^A(\langle e, i\rangle + k+1)$ и $\Psi^A(w(\langle e, i\rangle, s))$ (т.к. $N_{\langle e,i\rangle+k+1}$ не заблокировано требованиями $N_0, \ldots, N_{\langle e,i\rangle}$). Для всех x, $\langle e, i\rangle + k + 1 \leq x \leq s$, увеличим значение функционала

$$\Theta^{A_{s+1}}_{s+1}(x) = \Theta^{A_s}_s(x) + \sum_{x \in D_{h(\langle e,i\rangle,s)}} \varphi_{i,s}(x) + |D_{h(e,s)}| + 2 \tag{4}$$

С use-ом $\theta^A(x, s+1) > \theta^A(x-1, s+1)$. Функционал $\Psi^A(w(\langle e, i\rangle, s))$ оставляем неопределенным.

Пусть $\Theta^A(\langle e, i\rangle + k+1)$ уже было изменено для текущего набора свидетелей. Если существует $y < \psi^A(w(\langle e, i\rangle, s), s)$ удовлетворяющий условию

$$y > \max\{r(j, s) \colon j \leq \langle e, i\rangle + k\} \ \&\ y \notin A_s, \tag{5}$$

то перечисляем наименьший такой y в A_{s+1}. Поэтому $\Psi^{A_s+1}_s(w(\langle e, i\rangle, s))\uparrow$.

Если такого y не существует, то выбираем другого свидетеля из $D_{h(\langle e,i\rangle,s)}$:

$$x' = \mu x(x \in D_{h(\langle e,i\rangle,s)} \ \&\ x > w(\langle e, i\rangle, s)).$$

Случай 2. Пусть $B_s(w(\langle e,i\rangle,s)) = 0$. Тогда определяем $\Psi^{A_s}_{s+1}(w(\langle e,i\rangle,s))$ с use-ом $\psi^A(x,s+1) > \max\{r(j,s)\colon j \le \langle e,i\rangle + k\}$ таким, чтобы существовал $y < \psi^A(x,s+1)$, для которого выполняется условие (5).

<u>Подшаг 2</u>. Для каждого $e \le s+1$ такого, что $\max\{r(j,s+1)\colon j\le e\} \ne \max\{r(j,s)\colon j\le e\}$, выбираем новых свидетелей. Выберем $n = n(e,s)$ элементов $x_1,\ldots,x_n \in \omega^{[\langle e,i\rangle]}$ таких, что

$$\max\left(D_{h(\langle e,i\rangle,s)}\right) < x_1 < \ldots < x_n$$

и положим

$$h(\langle e,i\rangle,s+1) = 2^{x_1}+2^{x_2}+\ldots+2^{x_n},$$
$$w(\langle e,i\rangle,s+1) = x_1.$$

Для всех остальных $\langle e,i\rangle \le s+1$ определяем

$$h(\langle e,i\rangle,s+1) = h(\langle e,i\rangle,s).$$

если $R_{\langle e,i\rangle}$ получило внимание на подшаге 1 и для него был выбран новый свидетель x', то

$$w(\langle e,i\rangle,s+1) = x',$$

иначе

$$w(\langle e,i\rangle,s+1) = w(\langle e,i\rangle,s).$$

Определим

$$\Theta^{A_{s+1}}_{s+1}(s+1) = \Theta^{A_{s+1}}_{s+1}(s) + 2^{s+1}$$

с use-ом $\theta^A(s+1,s+1) > \theta^A(s,s+1)$.

На этом конструкция завершается. Произведем верификацию конструкции.

Лемма 1. *Для любого j требование R_j получает внимание лишь конечное число раз и в конце концов удовлетворяется. При этом для любого j существуют пределы $r(j) = \lim_s r(j,s)$, $h(j) = \lim_s h(j,s)$ и $w(j) = w(j,s)$.*

Доказательство. Пусть s — такой шаг, что $R_0,\ldots,R_{j-1}$ не получают внимания на шагах $\ge s$ и $r(e,t) = r(e)$ для любых $t \ge s$ и $e < j$.

Предположим, существует $s' \ge s$ такой, что $\Phi^{A_{s'}}_{j,s'}(j)\downarrow$. В силу того, что на шагах $t+1 > s'$ в A перечисляются только элементы $>\ r(j,t) = \mathrm{u}(A_t;j,j,t)$, то

$$A \upharpoonright r(j,t) = A_t \upharpoonright r(j,t).$$

По use-принципу $\Phi^A_j(j)\downarrow = \Phi^{A_{s'}}_{j,s'}(j)$, следовательно, для любого $t > s'$ $r(j,t) = r(j,s') = r(j)$.

Докажем, что существует $h(j) = \lim_s h(j,s)$. Пусть $s' \ge s$ — такой шаг, что $r(j,t) = r(j)$ для всех $t \ge s'$. На всех шагах $t+1 > s'$ имеет место

$$\max\{r(e,t+1)\colon e\le j\} = \max\{r(e)\colon e \le j\} = \max\{r(e,t)\colon e\le j\}.$$

Следовательно, на шагах $>\ s'$ новые свидетели выбираться не будут, поэтому $h(j,t) = h(j)$ для любого $t > s'$.

Теперь пусть $s' \ge s$ — такой шаг, что $h(j,t) = h(j)$ для всех $t \ge s'$. Пусть

$$D_{h(j)} = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_n\}$$

и $w(j,s') = x_i$. Рассмотрим следующую конфигурацию требований:

$$R_j, N_{j+1}, R_{j+1}, \ldots, N_{j+k}, R_{j+k}, N_{j+k+1}$$

где k — такое, что N_{j+k+1} — первое не заблокированное требование. Активный свидетель может измениться, если только use некоторого из $\Phi_{j+1}^A(j+1), \ldots, \Phi_{j+k}^A(j+k)$ увеличился. Как было показано выше такая ситуация может возникнуть не более $n-1$ раз. Значит, если существует шаг $t \geq s'$ такой, что $w(j,t) = x_n$, то для любого $\nu \geq t$ имеет место $w(j) = w(j,\nu) = w(j,t)$. Если же не существует шага, на котором будет выбран свидетель x_n, то $w(j) = x_v$ для некоторого $v < n$.

Лемма 2. *Для любого j требование N_j удовлетворяется.*

Доказательство. Пусть s' — наименьший шаг такой, что $R_0, R_1, \ldots, R_{j-1}$ не получают внимания на шагах $\geq s'$. На шагах $\geq s'$ требование N_j не нарушается, поэтому существует самое большее одно такое $s \geq s'$, что $g(j,s) \neq g(j,s+1)$. Если имеет место

$$\Theta_{s'}^{A_{s'}}(j) > |\{t \colon t < s' \ \& \ g(e,t) \neq g(e,t+1)\}|,$$

то N_j удовлетворено.

Докажем, что для любого $s < s'$, если R_e, $e < j$, получает внимание на шаге s, то $\Theta_s^{A_s}(e) > |\{t \colon t < s \ \& \ g(e,t) \neq g(e,t+1)\}|$.

Пусть R_e, $e < j$, получает внимание на шаге $s+1 < s'$. Предположим, на шаге s требование N_j удовлетворяется. Пусть $k > j$ — наименьшее такое, что N_k не заблокировано требованиями $N_0, \ldots, N_e$. Рассмотрим случаи.

Случай 1. N_j заблокировано некоторыми из $N_0, \ldots, N_e$. Если для данных свидетелей R_e значение $\Theta^A(k)$ не изменялось, то может потребоваться перечисление элемента $< r(j,s)$, что приведет к увеличению на 2 числа изменений $g(j,s)$. Как было показано выше, значение $\Theta^A(j)$ изначально достаточно большое, и поэтому выполняется

$$|\{t \colon t < s+1 \ \& \ g(e,t) \neq g(e,t+1)\}| < \Theta_{s+1}^{A_{s+1}}(e).$$

Если же значение Θ^A уже было изменено, то на данном шаге может перечислиться только число $> r(e,s)$, поэтому N_j не нарушается.

Случай 2. N_e не заблокировано требованиями $N_0, \ldots, N_e$. Если для данных свидетелей R_e значение $\Theta^A(k)$ не было изменено, то перечисляется $x < \theta^A(k,s)$ и увеличиваются значения $\Theta^A(x)$ при $x \geq k$ по формуле (4), следовательно, увеличивается $\Theta^A(j)$. Ясно, что при этом требование N_j выполняется после шага s.

Пусть $\Theta^A(j)$ уже было изменено. Как было показано в описании стратегии, требование R_e с свидетелем x может перечислить в A самое большее $\left\lceil \frac{\varphi_{\pi_2(e)}(x)}{2} \right\rceil$ элементов и, следовательно, повлечь не более $\varphi_{\pi_2(e)}(x)+1$ изменений последовательности $g(j,t)$. Всего из-за R_e с данными свидетелями $g(j,t)$ может измениться не более $\sum\limits_{x \in D_{h(e,s)}} \varphi_{\pi_2(e)}(x) + |D_{h(e,s)}|$ раз. Поэтому в силу формулы (4) требование N_j выполняется после шага s.

$\square$

4 Незамкнутость вниз относительно $\leq_T$

Применим разработанный выше метод для доказательства незамкнутости вниз класса FL относительно $\leq_T$.

Теорема 3. *Существует умеренно низкое в.п. множество A такое, что $A^{[0]} = A \cap \{\langle x, 0\rangle \colon x \in \omega\}$ не умеренно низкое.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы опирается на доказательства теорем 1 и 2. Укажем лишь основные изменения, которые нужно внести в доказательства. Также как и в предыдущей теореме строим в.п. множество A, тьюринговые функционалы $\Psi^{A^{[0]}}$ и Θ^A, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$R_{\langle e,i\rangle} : \forall x\ (B(x) = \lim_s \varphi_e(x,s)) \Rightarrow \exists x\ (|\{s\colon \varphi_e(x,s) \neq \varphi_e(x,s+1)\}| > \Phi_i^{A^{[0]}}(x));$$

$$N_e : |\{s\colon g(e,s) \neq g(e,s+1)\}| \leq \Theta^A(e),$$

где

$$B = \operatorname{dom} \Psi^{A^{[0]}},$$

и аппроксимация g определяется, как в предыдущей теореме. Запрещающая функция N-требований определяется следующим образом:

$$r(e,s) = \mathrm{u}(A_s; e, e, s).$$

R-требования ставят следующие запреты на перечисление в $A^{[0]}$:

$$q(\langle e,i\rangle, s) = \max\{\mathrm{u}(A_s^{[0]}; i, x, s)\colon x \in D_{h(\langle e,i\rangle,s)}\},$$

где $h(\langle e,i\rangle, s)$, как и в предыдущей теореме, — канонический индекс множества свидетелей для требования $R_{\langle e,i\rangle}$.

Опишем стратегию удовлетворения требований. Т.к. теперь и R-требования ставят запреты, то это должно учитываться при выборе количества свидетелей и начальных значений функционала Θ^A. Рассмотрим следующую конфигурацию:

$$N_0, \ldots, N_e, R_e, N_{e+1}, R_{e+1}, \ldots, R_{e+k}, N_{e+k+1},$$

где N_{e+k+1} — первое требование, не заблокированное $N_0, \ldots, N_e$. Требование R_e должно избегать нарушения требований $R_{e+1}, \ldots, R_{e+k}$, т.е. либо не перечислять ничего в $A^{[0]}$, либо соблюдать запреты $R_{e+1}, \ldots, R_{e+k}$. Для R_e выбирается некоторое число свидетелей, и активный свидетель меняется, если происходит изменение запрета одного из требований $N_{e+1}, R_{e+1}, \ldots, N_{e+k}, R_{e+k}$. Подсчет необходимого числа свидетелей такой же, как в теореме 2. На активном свидетеле диагонализируемся против последовательности φ_i, где $e = \langle i,j\rangle$.

Построение множества A.
$h(\langle e,i\rangle, s)$ и $w(\langle e,i\rangle, s)$ — множество свидетелей и активный свидетель требования $R_{\langle e,i\rangle}$.

Шаг $s = 0$. Пусть $A_0 = V_{\Psi,0} = \emptyset$. Определим $\Theta^{A_0}(0) = 1$ с use-ом $\theta^A(0,0) = 2$. Изначально к каждому требованию прикреплен один свидетель: $h(\langle e,i\rangle, 0) = 2^{\langle 0,\langle e,i\rangle\rangle}$ и $w(\langle e,i\rangle, 0) = \langle 0, \langle e,i\rangle\rangle$ для всех $\langle e,i\rangle$.

Шаг $s + 1$. $R_{\langle e,i\rangle}$ требует внимания, если выполнены условия 1-4 из доказательства теоремы 2 с заменой $\varphi_{i,s}$ на $\Phi_{i,s}^{A_s^{[0]}}$.

Выбираем наименьшее $\langle e,i\rangle \leq s$ такое, что $R_{\langle e,i\rangle}$ требует внимания. Если с текущими свидетелями значение $\Theta^A(x)$ для незаблокированных N_x не изменялось, то перечисляем наименьший элемент $y > \max\{r(j,s)\colon j \leq \langle e,i\rangle\}$ такой, что $y \notin \omega^{[0]}$, и меняем значение соответствующих $\Theta^A(x)$.

Диагонализируемся, как в предыдущих теоремах. Если нет возможности изменить значение $\Psi^{A^{[0]}}(w(\langle e,i\rangle, s))$, то меняем активного свидетеля.

Далее, проводим изменение свидетелей по аналогии с теоремой 2. Нужно менять свидетелей, если $\max\{r(j,s)\colon j \leq s\} \neq \max\{r(j,s+1)\colon j \leq s\}$ или $\max\{q(j,s)\colon j \leq s\} \neq \max\{q(j,s+1)\colon j \leq s\}$. Аналогично проводятся все необходимые подсчеты и верификация конструкции. $\square$

5 Дальнейшие вопросы

Две первые теоремы устанавливают нетривиальность класса умеренно низких множеств, т.е. его отличие от уже известных классов супернизких и низких множеств. Теорема 3 «перекрывает» первые два результата, т.к. они являются следствиями из теоремы 3, и дает нетривиальное свойство класса FL.

Определение супернизких и умеренно низких множеств приводят к такому обобщению. Множество A супернизкое над множеством B (символически $A \in SL(B)$), если $A' = \lim f_s$ для некоторой вычислимой последовательности такой, что существует $g \leq_T B$, для которой имеет место $|\{s\colon f_s(x) \neq f_{s+1}(x)\}| \leq g(x)$ для всех x. Т.о. получаем, что A — супернизкое тогда и только тогда, когда $A \in SL(\emptyset)$; A — умеренно низкое тогда и только тогда, когда $A \in SL(A)$. Как следует из теоремы 1, класс Low не исчерпывается супернизкими множествами над $\emptyset$ и супернизкими над собой. При этом для любого $A \in Low$ имеет место $A \in SL(\emptyset')$. Поэтому возникает **вопрос**: существует ли для каждого низкого множества A некоторое множество $B <_T \emptyset'$ такое, что $A \in SL(B)$? Если да, то можно ли построить классификацию всех низких множеств в терминах супернизости над чем-то?

Список литературы

[1] A. Nies, L. Bienvenu, N. Greenberg, A. Kucera, and D. Turetsky. Coherent randomness tests and computing the K-trivial sets. / `https://www.cs.auckland.ac.nz/~nies/papersnew/Bienvenu.Greenberg.etalOberwolfachPaper.pdf`

[2] Мальцев, А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А.И. Мальцев. — М. : Наука, 1986. — 367 с.

[3] Соар, Р.И. Вычислимо перечислимые множества и степени / Р.И. Соар М. : Казанское математическое общество, 2000. — 567 с.: ил.

[4] Nies, A. Computability and Randomness / A. Nies M. : Oxford University Press, 2009. — 433 c.