О количестве максимальных независимых множеств в полных q-арных деревьях

Дмитрий Сергеевич Талецкий[*],
Дмитрий Сергеевич Малышев[†]

Аннотация

В работе исследуется асимптотическое поведение величины $\mathrm{mi}(T_{q,n})$ — количества максимальных независимых множеств в полном q-арном дереве высоты n. Показывается, что для некоторых констант α_2 и β_2 при $n \longrightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство $\mathrm{mi}(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$. Доказывается также, что для любого достаточно большого q, некоторых трёх попарно различных констант $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$ и константы b_q при $k \longrightarrow \infty$ имеют место асимптотические равенства: $\mathrm{mi}(T_{q,3k}) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, \mathrm{mi}(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}, \mathrm{mi}(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}$.

Ключевые слова: максимальное независимое множество, полное q-арное дерево

1 Введение

Независимым множеством в графе называется произвольное множество попарно несмежных его вершин. Независимое множество графа называется *максимальным*, если оно максимально по включению. Для обозначения максимального независимого множества графа мы будем использовать сокращение «м.н.м.». Количество независимых множеств (соответственно, максимальных независимых множеств) графа G принято обозначать как $\mathrm{i}(G)$ (соответственно, $\mathrm{mi}(G)$).

Исследованию асимптотики количества независимых множеств в графах из параметрически заданных классов (в зависимости от параметров класса) посвящено множество работ. Так, А. Д. Коршунов и А. А. Сапоженко получили асимптотику количества независимых множеств в n-мерном кубе [3]. Н. Калкин и Г. Вилф получили слабую асимптотику количества независимых множеств в плоской прямоугольной решётке [4]. Р. Эйлер в работе

[*]Место работы: Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского; e-mail: dmitalmail@gmail.com

[†]Место работы: Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского; e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

[5] получил производящие функции количества м.н.м. в прямоугольных решетках ширины $3, 4, 5$. В работе [6] были получены производящие функции количества м.н.м. в прямоугольных решетках-параллелепипедах с основаниями 2×2, 2×3 и 3×3.

В. П. Воронин и Е. В. Демакова получили асимптотику количества независимых множеств в полных бинарных деревьях [1]. П. Киршенхофер, Х. Продингер и Р. Тишай рассматривали случай полных q-арных деревьев. Полное q-арное дерево высоты n мы обозначаем через $T_{q,n}$. П. Киршенхофер, Х. Продингер и Р. Тишай доказали в [7] существование таких констант $\beta'_q, \alpha'_q, \alpha'_{q,1}, \alpha'_{q,2}$ ($\alpha'_{q,1} \neq \alpha'_{q,2}$), что для любого $q \in \overline{2,4}$ при $n \longrightarrow \infty$ выполнена асимптотика $i(T_{q,n}) \sim \alpha'_q \cdot (\beta'_q)^{q^n}$ и для любого $q \geq 5$ при $k \longrightarrow \infty$ справедливы асимптотики $i(T_{q,2k}) \sim \alpha'_{q,1} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k}}$ и $i(T_{q,2k+1}) \sim \alpha'_{q,2} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k+1}}$.

Целью настоящей работы является исследование поведения величины $\mathrm{mi}(T_{q,n})$ при $n \longrightarrow \infty$ в зависимости от $q \geq 2$. Основными её результатами являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Существуют константы α_2 и β_2 такие, что при $n \longrightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство $mi(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$.*

Теорема 2. *Для любого достаточно большого q существуют три попарно различные константы $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$ и константа b_q такие, что при $k \longrightarrow \infty$ имеют место асимптотические равенства: $mi(T_{q,3k}) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}$, $mi(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}$, $mi(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}$.*

2 Асимптотика количества м.н.м. в деревьях $T_{q,n}$

Доказательства теорем 1 и 2 составляют содержание этого раздела работы. Эти доказательства не разбиваются на леммы и теоремы, а представляются в форме подразделов, каждый из которых является отдельной смысловой частью общего рассуждения.

2.1 Вывод рекуррентного соотношения для количества м.н.м. в деревьях $T_{q,n}$

Введём переобозначение: $\mathrm{mi}(q, n) = \mathrm{mi}(T_{q,n})$. Количество м.н.м. дерева $T_{q,n}$, каждое из которых содержит его корень r, мы обозначим через $\mathrm{mi}_+(q, n)$. Количество м.н.м. дерева $T_{q,n}$, каждое из которых не содержит вершины r, мы обозначим через $\mathrm{mi}_-(q, n)$. Очевидно, что $\mathrm{mi}(q, n) = \mathrm{mi}_+(q, n) + \mathrm{mi}_-(q, n)$.

Пусть MIS — некоторое м.н.м. дерева $T_{q,n}$. Удалив корень r дерева $T_{q,n}$ и всех детей r, мы получим множество из q^2 его поддеревьев, каждое из которых изоморфно $T_{q,n-2}$. Поэтому, если $r \in MIS$, то множество $MIS \setminus \{r\}$ является дизъюнктным объединением q^2 множеств, каждое из которых является м.н.м. своего поддерева $T_{q,n-2}$. Обратно, если в каждом из данных

q^2 поддеревьев взять м.н.м., добавить вершину r к объединению этих множеств, то мы получим некоторое м.н.м. дерева $T_{q,n}$, содержащее вершину r. Поэтому справедливо равенство $\mathrm{mi}_+(q,n) = (\mathrm{mi}(q,n-2))^{q^2}$.

Удалив корень r дерева $T_{q,n}$, мы получим множество из q его поддеревьев, каждое из которых изоморфно $T_{q,n-1}$. Если же $r \notin MIS$, то множеству MIS принадлежит некоторый из корней этих q поддеревьев, поскольку MIS максимально по включению. Обратно, если в каждом из этих q поддеревьев взять м.н.м., причём хотя бы одно из этих множеств содержит корень своего поддерева, то объединение этих множеств будет м.н.м. дерева $T_{q,n}$, не содержащим вершины r. Значит, $\mathrm{mi}_-(q,n)$ равно количеству способов выбрать набор из q множеств, каждое из которых — м.н.м. дерева, изоморфного $T_{q,n-1}$, минус количество способов выбрать набор из q множеств, каждое из которых — м.н.м. дерева, изоморфного $T_{q,n-1}$ и не содержащего его корень. Поэтому, $\mathrm{mi}_-(q,n) = (\mathrm{mi}(q,n-1))^q - (\mathrm{mi}_-(q,n-1))^q$. Это равенство (используем ранее полученное равенство $\mathrm{mi}_+(q,n-1) = (\mathrm{mi}(q,n-3))^{q^2}$) можно переписать следующим образом:

$$\mathrm{mi}_-(q,n) = (\mathrm{mi}(q,n-1))^q - (\mathrm{mi}_-(q,n-1))^q =$$
$$= (\mathrm{mi}(q,n-1))^q - (\mathrm{mi}(q,n-1) - \mathrm{mi}_+(q,n-1))^q =$$
$$= (\mathrm{mi}(q,n-1))^q - (\mathrm{mi}(q,n-1) - (\mathrm{mi}(q,n-3))^{q^2})^q.$$

Объединяя ранее полученные соотношения для $\mathrm{mi}_+(q,n)$ и $\mathrm{mi}_-(q,n)$, получаем равенство:

$$\mathrm{mi}(q,n) = (\mathrm{mi}(q,n-2))^{q^2} + (\mathrm{mi}(q,n-1))^q - (\mathrm{mi}(q,n-1) - (\mathrm{mi}(q,n-3))^{q^2})^q \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что $\mathrm{mi}(q,0) = 1, \mathrm{mi}(q,1) = 2, \mathrm{mi}(q,2) = 2^q$.

2.2 Частичное решение полученного рекуррентного уравнения

Для того, чтобы частично решить уравнение (1) с заданными начальными условиями, рассмотрим величину $a(q,n) \triangleq \frac{\mathrm{mi}(q,n)}{(\mathrm{mi}(q,n-1))^q}$. Очевидно, что $\frac{(\mathrm{mi}(q,n-2))^{q^2}}{(\mathrm{mi}(q,n-1))^q} = \frac{1}{(a(q,n-1))^q}$ и что $\frac{(\mathrm{mi}(q,n-3))^{q^2}}{\mathrm{mi}(q,n-1)} = \frac{1}{a(q,n-1)\cdot(a(q,n-2))^q}$. Поэтому равенство (1) и его начальные условия могут быть переписаны в следующей форме:

$$\begin{aligned} a(q,n) &= \frac{1}{(a(q,n-1))^q} + 1 - \left(1 - \frac{1}{a(q,n-1)\cdot(a(q,n-2))^q}\right)^q, \\ a(q,1) &= 2, \\ a(q,2) &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку $a(q,n) = \frac{\mathrm{mi}(q,n)}{(\mathrm{mi}(q,n-1))^q}$, то $\ln(a(q,n)) = \ln(\mathrm{mi}(q,n)) - q \cdot \ln(\mathrm{mi}(q,n-1))$. Поэтому при любом $n \geq 1$ и любом $i \in \overline{0, n-1}$ выполнено равенство $q^i \cdot \ln(a(q,n-i)) = q^i \cdot \ln(\mathrm{mi}(q,n-i)) - q^{i+1} \cdot \ln(\mathrm{mi}(q,n-i-1))$. Значит, $\ln(\mathrm{mi}(q,n)) - q^n \cdot \ln(\mathrm{mi}(q,0)) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (\ln(a(q,n-i)) \cdot q^i)$ для любого $n \geq 1$. Иными словами,

$$\ln(\mathrm{mi}(q,n)) = \sum_{i=1}^{n} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{n-i}) = q^n \cdot \sum_{i=1}^{n} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{-i}) =$$

$$= q^n \cdot (\sum_{i=1}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{-i}) - \sum_{i=n+1}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{-i})) =$$

$$= q^n \cdot (\sum_{i=1}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{-i})) - \sum_{i=n+1}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{n-i}).$$

Поскольку при любом q последовательность $\{a(q,n)\}$ ограничена и сверху и снизу некоторыми положительными константами (что с очевидностью следует из выполнения неравенств $(\mathrm{mi}(q,n-1))^q \leq \mathrm{mi}(q,n) \leq 2 \cdot (mi(q,n-1))^q$), то определена сумма $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{-i})$ сходящегося числового ряда, которую мы обозначим через $\ln(\beta_q)$. Поэтому $\ln(\mathrm{mi}(q,n)) = q^n \cdot \ln(\beta_q) + \ln(\alpha_{q,n})$ для некоторого числа $\alpha_{q,n}$, т.е. справедливо соотношение:

$$\mathrm{mi}(q,n) = \alpha_{q,n} \cdot (\beta_q)^{q^n}. \tag{3}$$

Цель наших дальнейших рассуждений — показать сходимость последовательности $\{\alpha_{2,n}\}$ и сходимость подпоследовательности $\{\alpha_{q,3k+r}\}$ для любого $r \in \overline{0,2}$ и любого достаточно большого q. Поскольку $\ln(\alpha_{q,n}) = -\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{n-i})$, то для доказательства данных двух фактов достаточно доказать сходимость последовательности $\{a(2,n)\}$ и подпоследовательностей $\{a(q,3k)\}, \{a(q,3k+1)\}, \{a(q,3k+2)\}$ при больших q.

Тем самым, для некоторой константы α_2 при $n \longrightarrow \infty$ справедлива асимптотика $\mathrm{mi}(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$. Для любого достаточно большого q, существуют попарно различные константы $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$ такие, что при $k \longrightarrow \infty$ справедливы асимптотики $\mathrm{mi}(T_{q,3k}) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, \mathrm{mi}(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}, \mathrm{mi}(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}$.

2.3 Случай $q = 2$

В этом разделе мы докажем, что последовательность $\{a(2,n)\}$ имеет предел. Введём обозначение: $g(t_1,t_2) \triangleq 1 + \frac{1}{t_1^2} - (1 - \frac{1}{t_1 t_2^2})^2$. На луче $[1, +\infty)$ существует единственное l такое, что $l = g(l,l)$. Для этого достаточно заметить, что функция $h(t) \triangleq t - g(t,t)$ имеет производную $h'_t = 1 + \frac{2}{t^3} + 2 \cdot (1 - \frac{1}{t^3}) \cdot \frac{3}{t^4}$, положительную и непрерывную в каждой точке этого луча, причём $h(1) = -1$ и $h(2) = \frac{97}{64}$. Можно показать, что $l = 1.29...$, поскольку $h(1.29) = -0.025...$ и $h(1.3) = 0.005...$.

Функция $g(t_1, t_2)$ имеет частные производные

$$g'_{t_1}(t_1, t_2) = -\frac{2}{t_1^3} - 2 \cdot (1 - \frac{1}{t_1 t_2^2}) \cdot \frac{1}{t_1^2 t_2^2},\ g'_{t_2}(t_1, t_2) = -2 \cdot (1 - \frac{1}{t_1 t_2^2}) \cdot \frac{2}{t_1 t_2^3}.$$

Определим числа $A \triangleq g'_{t_1}(l, l) = -1.296...$ и $B \triangleq g'_{t_2}(l, l) = -0.764....$ Очевидно, что $a(2, n) = g(a(2, n-1), a(2, n-2))$ для любого $n \geq 3$. Положим $\epsilon_n \triangleq a(2, n) - l$. Из формулы Тейлора следует, что

$$\epsilon_n = A \cdot \epsilon_{n-1} + B \cdot \epsilon_{n-2} + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2).$$

Поэтому $\epsilon_{n+1} = A \cdot \epsilon_n + B \cdot \epsilon_{n-1} + O(\epsilon_n^2 + \epsilon_{n-1}^2) = (A^2 + B) \cdot \epsilon_{n-1} + AB \cdot \epsilon_{n-2} + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2)$ и $\epsilon_{n+2} = A \cdot \epsilon_{n+1} + B \cdot \epsilon_n + O(\epsilon_{n+1}^2 + \epsilon_n^2) = (A^2 + B) \cdot \epsilon_n + AB \cdot \epsilon_{n-1} + O(\epsilon_n^2 + \epsilon_{n-1}^2) = (A^3 + 2AB) \cdot \epsilon_{n-1} + (A^2 B + B^2) \cdot \epsilon_{n-2} + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2)$. Значит, справедливо неравенство:

$$|\epsilon_{n+2}| \leq (|A^3 + 2AB| + |A^2 B + B^2|) \cdot \max(|\epsilon_{n-1}|, |\epsilon_{n-2}|) + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2). \quad (4)$$

Число $|A^3 + 2AB| + |A^2 B + B^2| = 0.896...$ меньше единицы. Константа C^*, скрытая в символе O, может быть оценена через максимум модулей значений вторых производных функции $g(t_1, t_2)$ на квадрате $[1, 2]^2$ и через числа A, B. Вычислив первые несколько членов последовательности $\{a(2, n)\}$ (см. таблицу 2 из третьего раздела этой работы), можно убедиться в том, что существует такое n^*, для которого остаточный член $C^* \cdot (\epsilon_{n^*-1}^2 + \epsilon_{n^*-2}^2)$ в формуле (4) не превосходит $\frac{1}{10} \cdot \max(|\epsilon_{n^*-1}|, |\epsilon_{n^*-2}|)$. Тем самым, $|\epsilon_{n^*+2}| \leq (|A^3 + 2AB| + |A^2 B + B^2| + \frac{1}{10}) \cdot \max(|\epsilon_{n^*-1}|, |\epsilon_{n^*-2}|)$. Поэтому существует такое число $0 < w < 1$, что для любого $n \geq n^*$ выполнено неравенство $|\epsilon_{n+2}| \leq w \cdot \max(|\epsilon_{n-1}|, |\epsilon_{n-2}|)$. Поэтому $\epsilon_n = O(w^{-\frac{n}{4}})$. Значит, последовательность $\{a(2, n)\}$ сходится к l с экспоненциальной от n скоростью. Теорема 1 доказана.

2.4 Разрешимость одной системы нелинейных уравнений

В этом подразделе мы рассматриваем систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x = f(z, y) \\ y = f(x, z) \\ z = f(y, x), \end{cases} \quad (5)$$

где $f(t_1, t_2) \triangleq \frac{1}{t_1^q} + 1 - (1 - \frac{1}{t_1 t_2^q})^q$ и показываем, что эта система имеет решение (x_q^*, y_q^*, z_q^*) при любом достаточно большом q. Обращаем внимание, что в обозначениях данной функции и производных от неё в списках аргументов мы не будем явно указывать аргумент q.

Мы будем работать со следующей системой уравнений, которая является следствием системы (5):

$$\begin{cases} x = f(f(y, x), y) \\ y = f(x, f(y, x)) \end{cases} \quad (6)$$

Введём обозначения:

$$f_1(t_1,t_2) \triangleq t_1 - f(f(t_2,t_1),t_2),\ \ f_2(t_1,t_2) \triangleq t_2 - f(t_1,f(t_2,t_1)),$$

$$Tr \triangleq \{(t_1,t_2):\ 1 \le t_1 \le 1+(\frac{3}{2})^{-q}, 1 \le t_2 \le 1+(\frac{3}{2})^{-q}, t_1 \le t_2\}.$$

Докажем, что треугольник Tr содержит решение системы (6) в качестве своей внутренней точки. Очевидно, что справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} f_1(t_1,t_2) &= t_1 - \frac{1}{f^q(t_2,t_1)} - 1 + (1-\frac{1}{f(t_2,t_1)t_2^q})^q \\ f_2(t_1,t_2) &= t_2 - \frac{1}{t_1^q} - 1 + (1-\frac{1}{t_1 f^q(t_2,t_1)})^q. \end{aligned} \tag{7}$$

Понятно, что при $q \longrightarrow \infty$ для любых $(t_1,t_2) \in Tr$ справедливы асимптотики:

$$f(t_1,t_2) \sim 2, t_1^q \sim 1, t_2^q \sim 1. \tag{8}$$

Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} f'_{t_1}(t_1,t_2) &= -\frac{q}{t_1^{q+1}} - q\cdot(1-\frac{1}{t_1t_2^q})^{q-1}\cdot\frac{1}{t_1^2t_2^q} \\ f'_{t_2}(t_1,t_2) &= -q\cdot(1-\frac{1}{t_1t_2^q})^{q-1}\cdot\frac{q}{t_1t_2^{q+1}} \\ \frac{df(t,t)}{dt} &= -\frac{q}{t^{q+1}} - q\cdot(1-\frac{1}{t^{q+1}})^{q-1}\cdot\frac{q+1}{t^{q+2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Из равенств (7) и (9) и упомянутых асимптотик (8) следует, что в любой точке $(t_1,t_2) \in Tr$ для любого достаточно большого q одновременно выполнены неравенства:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t_1,t_2) > 0\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t_1,t_2) > 0\ \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t_1,t_2) > 0. \tag{10}$$

Докажем, что для любого $t \in [1, 1+(\frac{3}{2})^{-q}]$ выполнено неравенство:

$$\frac{df_3}{dt}(t) < 0, \tag{11}$$

где $f_3(t) \triangleq f_1(1,t) = -\frac{1}{f^q(t,1)} + (1-\frac{1}{f(t,1)t^q})^q$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{df_3}{dt}(t) &= q\cdot\frac{f'_t(t,1)}{f^{q+1}(t,1)} + q\cdot(1-\frac{1}{f(t,1)t^q})^{q-1}\cdot\frac{(f(t,1)t^q)'_t}{f^2(t,1)t^{2q}} = \\ &= q^2\cdot\frac{-\frac{1}{t^{q+1}} - (1-\frac{1}{t})^{q-1}\cdot\frac{1}{t^2}}{f^{q+1}(t,1)} + q^2\cdot(1-\frac{1}{f(t,1)t^q})^{q-1}\cdot\frac{t^{q-1}-(t-1)^{q-1}}{f^2(t,1)t^{2q}} = \\ &= \frac{q^2}{f^2(t,1)t^{q+1}}\cdot((1-\frac{1}{f(t,1)t^q})^{q-1} - \frac{1}{f^{q-1}(t,1)}) - q^2\cdot\frac{(1-\frac{1}{t})^{q-1}\cdot\frac{1}{t^2}}{f^{q+1}(t,1)} - \end{aligned} \tag{12}$$

$$- q^2 \cdot (1 - \frac{1}{f(t,1)t^q})^{q-1} \cdot \frac{(t-1)^q}{f^2(t,1)t^{2q}}.$$

Очевидно, что $1 - \frac{1}{f(t,1)t^q} < \frac{1}{f(t,1)}$ при любом $t \in [1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$. Отсюда и формулы (12) следует, что $\frac{df_3}{dt}(t) < 0$ для любого $t \in [1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$.

Рассмотрим функции $f_1(t,t)$ и $f_2(t,t)$. При любом достаточно большом q они обе монотонно возрастают на отрезке $[1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$. Это следует из (7), (8) и (9). Оценим значения функций $f_1(t_1,t_2)$ и $f_2(t_1,t_2)$ в вершинах треугольника Tr. Имеем: $f_1(P_1) = 0$ и $f_2(P_1) = (1 - \frac{1}{2^q})^q - 1 < 0$, где $P_1 \triangleq (1,1)$. Значение функции $f_1(t_1,t_2)$ в точке $P_2 \triangleq (1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q})$ равно $(1 - \frac{1}{f(1+(\frac{3}{2})^{-q},1)\cdot(1+(\frac{3}{2})^{-q})^q})^q - \frac{1}{f^q(1+(\frac{3}{2})^{-q},1)}$. Легко видеть, что это число является отрицательным, т.к. $f(1+(\frac{3}{2})^{-q},1) < 1 + \frac{1}{1+(\frac{3}{2})^{-q}}$. Значение функции $f_2(t_1,t_2)$ в точке P_2 равно $(\frac{3}{2})^{-q} + (1 - \frac{1}{f^q(1+(\frac{3}{2})^{-q},1)})^q - 1$. Из выполнения асимптотик (8) следует, что при любом достаточно большом q справедливо неравенство $f_2(P_2) > 0$. По аналогии можно показать, что для любого достаточно большого q выполняются неравенства $f_1(P_3) > 0$ и $f_2(P_3) > 0$, где $P_3 \triangleq (1 + (\frac{3}{2})^{-q}, 1 + (\frac{3}{2})^{-q})$.

Отображение $F(t_1,t_2) \triangleq (f_1(t_1,t_2), f_2(t_1,t_2))$ переводит катет P_1P_2 треугольника Tr в некоторую кривую S_1, соединяющую точки $F(P_1)$ и $F(P_2)$. По неравенствам (10) и (11) при проходе кривой S_1 от $F(P_1)$ до $F(P_2)$ уменьшается абсцисса и возрастает ордината. Катет P_2P_3 переводится в кривую S_2, при прохождении которой от $F(P_2)$ до $F(P_3)$ увеличивается и абсцисса и ордината, ввиду выполнения тех же неравенств. Поскольку для любого $t \in [1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$ выполнены неравенства $\frac{df_1(t,t)}{dt} > 0$ и $\frac{df_2(t,t)}{dt} > 0$, то P_1P_3 отображением F переводится в кривую S_3, при прохождении которой от $F(P_1)$ к $F(P_3)$ растут и абсцисса и ордината.

Точка $F(P_1)$ лежит в нижнем полупространстве на оси ординат, точка $F(P_2)$ лежит во втором квадранте, а точка $F(P_3)$ в первом. Поэтому криволинейный треугольник Tr', ограниченный кривыми S_1, S_2 и S_3, содержит начало координат в качестве своей внутренней точки. Отображение F является непрерывным на Tr, поэтому оно переводит Tr в Tr'. Значит, существует решение (x_q^*, y_q^*, z_q^*) системы (6), являющееся внутренней точкой Tr. Тем самым, $1 < x_q^* < y_q^* < 1 + (\frac{3}{2})^{-q}$ и $z_q^* = 2 - O((\frac{3}{2})^{-q})$.

2.5 Случай больших q

В этом подразделе работы мы покажем, что для любого достаточно большого q при $k \longrightarrow \infty$ справедливы предельные переходы: $a(q, 3k+1) \longrightarrow z_q^*, a(q, 3k+2) \longrightarrow x_q^*, a(q, 3k+3) \longrightarrow y_q^*$. Из формулы (2) и определения функции $f(t_1,t_2)$ следует, что $a(q,n) = f(a(q,n-1), a(q,n-2))$. Введём обозначения: $\zeta_{q,k} \triangleq a(q,3k+1) - z_q^*, \eta_{q,k} \triangleq a(q,3k+2) - x_q^*, \theta_{q,k} \triangleq a(q,3k+3) - y_q^*$. Очевидно, что, согласно формулам (2), при $q \longrightarrow \infty$ имеет место предельный переход: $\max(|\zeta_{q,0}|, |\eta_{q,0}|, |\theta_{q,0}|) \longrightarrow 0$. Из соотношений (2) следуют равенства:

$$\begin{array}{rcl} \zeta_{q,k+1} + z_q^* & = & f(\theta_{q,k} + y_q^*, \eta_{q,k} + x_q^*) \\ \theta_{q,k} + y_q^* & = & f(\eta_{q,k} + x_q^*, \zeta_{q,k} + z_q^*) \\ \eta_{q,k} + x_q^* & = & f(\zeta_{q,k} + z_q^*, \theta_{q,k-1} + y_q^*) \end{array} \tag{13}$$

Из (13), равенств $z_q^* = f(y_q^*, x_q^*), y_q^* = f(x_q^*, z_q^*), x_q^* = f(z_q^*, y_q^*)$ и формулы Тейлора следуют равенства:

$$\begin{array}{rcl} \zeta_{q,k+1} & = & f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot \theta_{q,k} + f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \cdot \eta_{q,k} + O(\theta_{q,k}^2 + \eta_{q,k}^2) \\ \theta_{q,k} & = & f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot \eta_{q,k} + f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) \cdot \zeta_{q,k} + O(\eta_{q,k}^2 + \zeta_{q,k}^2) \\ \eta_{q,k} & = & f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) \cdot \zeta_{q,k} + f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \cdot \theta_{q,k-1} + O(\zeta_{q,k}^2 + \theta_{q,k-1}^2) \end{array} \tag{14}$$

Из равенств (14) следуют равенства:

$$\begin{array}{rcl} \eta_{q,k} & = & f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) \cdot \zeta_{q,k} + f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \cdot \theta_{q,k-1} + O(\zeta_{q,k}^2 + \theta_{q,k-1}^2) \\ \theta_{q,k} & = & (f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*)) \cdot \zeta_{q,k} + \\ & & + f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \cdot \theta_{q,k-1} + O(\zeta_{q,k}^2 + \theta_{q,k-1}^2) \\ \zeta_{q,k+1} & = & (f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) + \\ & & + f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) \cdot f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*)) \cdot \zeta_{q,k} + (f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) + \\ & & + f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*)) \cdot \theta_{q,k-1} + O(\zeta_{q,k}^2 + \theta_{q,k-1}^2) \end{array} \tag{15}$$

Поскольку $x_q^* = 1 + O((\frac{3}{2})^{-q}), y_q^* = 1 + O((\frac{3}{2})^{-q})$ и $z_q^* = 2 - O((\frac{3}{2})^{-q})$, то по формулам (9) справедливы равенства

$$|f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*)| = O(\frac{q}{2^q}), |f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*)| = O(\frac{q^2}{2^q}), |f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*)| = O(q),$$

$$|f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*)| = O(\frac{q^2}{2^q}), |f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*)| = O(q), |f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*)| = O(q^2).$$

Поэтому коэффициенты перед $\zeta_{q,k}$ и $\theta_{q,k-1}$ в формулах (15) являются экспоненциально убывающими от q. Напомним, что $\lim\limits_{q\to\infty} \max(|\zeta_{q,0}|, |\eta_{q,0}|, |\theta_{q,0}|) = 0$. Значит, для любого достаточно большого q существует такое $0 < w_q < 1$, что $\max(\eta_{q,k}, \theta_{q,k}, \zeta_{q,k}) = O((w_q)^k)$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} a(q, 3k+1) = z_q^*,$$

$$\lim_{k\to\infty} a(q, 3k+2) = x_q^*,$$

$$\lim_{k\to\infty} a(q, 3k+3) = y_q^*$$

для любого достаточно большого q.

Напомним, что $\alpha_{q,n} = \exp\{-\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\ln(a(q,n+i)) \cdot q^{-i})\}$ и что при больших q справедливо $1 < x_q^* < y_q^* < 1 + (\frac{3}{2})^{-q}$ и $z_q^* = 2 - O((\frac{3}{2})^{-q})$. Если $n + 1 \equiv 0 \ (mod\ 3)$ и n, q достаточно большие, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\ln(a(q, n+1)) \cdot q^{-i}) \approx (\frac{y_q^*}{q} + \frac{y_q^*}{q^4} + \frac{y_q^*}{q^7} + \ldots) + (\frac{z_q^*}{q^2} + \frac{z_q^*}{q^5} + \frac{z_q^*}{q^8} + \ldots) + (\frac{x_q^*}{q^3} + \frac{x_q^*}{q^6} + \frac{x_q^*}{q^9} + \ldots)$. Последняя сумма равна $y_q^* \cdot \frac{q^2}{q^3-1} + z_q^* \cdot \frac{q}{q^3-1} + x_q^* \cdot \frac{1}{q^3-1}$. Аналогично, если $n + 1 \equiv 1 \ (mod\ 3)$ и n, q достаточно большие, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\ln(a(q, n+1)) \cdot q^{-i})$ близко к $z_q^* \cdot \frac{q^2}{q^3-1} + x_q^* \cdot \frac{q}{q^3-1} + y_q^* \cdot \frac{1}{q^3-1}$. Аналогично, если $n + 1 \equiv 2 \ (mod\ 3)$ и n, q достаточно большие, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\ln(a(q, n+1)) \cdot q^{-i})$ близко к $x_q^* \cdot \frac{q^2}{q^3-1} + y_q^* \cdot \frac{q}{q^3-1} + z_q^* \cdot \frac{1}{q^3-1}$. Значит, при больших q три суммы близки к $\frac{q^2+2\cdot q+1}{q^3-1}$, $\frac{2\cdot q^2+q+1}{q^3-1}$, $\frac{q^2+q+2}{q^3-1}$, соответственно. Отсюда следует, что при больших q подпоследовательности $\{\alpha_{q,3k}\}, \{\alpha_{q,3k+1}\}, \{\alpha_{q,3k+2}\}$ сходятся к трём попарно различным пределам. Теорема 2 доказана.

3 Вычислительные эксперименты

3.1 Эксперимент 1

Интересен вопрос о том, начиная с какого значения параметра q теорема 2 вступает в силу. Для ответа на него был проведён вычислительный эксперимент, показавший следующие результаты (в ячейках таблиц в дробной части чисел указаны первые три значащие цифры).

q	**n**									
	10	20	30	40	50	600	700	800	900	1000
2	1.178	1.284	1.303	1.300	1.298	1.298	1.298	1.298	1.298	1.298
3	1.045	1.194	1.445	1.510	1.290	1.106	1.329	1.411	1.118	1.252
4	1.008	1.226	1.805	1.374	1.028	1.037	1.038	1.040	1.042	1.044
5	1.004	1.466	1.566	1.021	1.001	1.765	1.000	1.790	1.019	1.363
6	1.008	1.790	1.108	1.000	1.309	1.039	1.000	1.000	1.001	1.082
7	1.036	1.691	1.000	1.193	1.410	1.213	1.000	1.694	1.000	1.960
8	1.222	1.113	1.000	1.896	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.075
9	1.593	1.018	1.333	1.034	1.025	1.000	1.018	1.996	1.025	1.000
10	1.818	1.000	1.995	1.000	1.053	1.000	1.087	1.000	1.038	1.004

Таблица 1: Значения некоторых членов последовательности $\{a(q, n)\}$

q	k									
	1	2	3	4	5	60	70	80	90	100
11	1.942	1.922	1.913	1.909	1.906	1.904	1.904	1.904	1.904	1.904
12	1.966	1.958	1.956	1.955	1.955	1.955	1.955	1.955	1.955	1.955
13	1.979	1.976	1.976	1.976	1.976	1.976	1.976	1.976	1.976	1.976

Таблица 2: Значения некоторых членов подпоследовательности $\{a(q, 3k+1)\}$

q	k									
	1	2	3	4	5	60	70	80	90	100
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.0008	1.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Таблица 3: Значения некоторых членов подпоследовательности $\{a(q, 3k+2)\}$

q	k									
	1	2	3	4	5	60	70	80	90	100
11	1.005	1.007	1.008	1.008	1.008	1.009	1.009	1.009	1.009	1.009
12	1.003	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004
13	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001

Таблица 4: Значения некоторых членов подпоследовательности $\{a(q, 3k)\}$

Из первой таблицы видно, что распадаемость последовательности $\{a(q, n)\}$ на три сходящиеся подпоследовательности, номера членов которых соответствуют классам вычетов по модулю 3, маловероятна при $q \in \overline{3, 10}$. Вычислительный эксперимент для бо́льших n и тех же q (не представленный в таблицах) подтверждает это наблюдение. Вместе с тем, по таблицам 2-4 просматривается, что $\{a(q, 3k)\}, \{a(q, 3k+1)\}, \{a(q, 3k+2)\}$ сходятся при $q \in \{11, 12, 13\}$. Это же экспериментально наблюдается и при бо́льших q и k. Тем самым, вычислительный эксперимент позволяет предположить, что теорема 2 (в части распадаемости на три сходящиеся подпоследовательности) справедлива для любого $q > 10$ и не имеет места при $q \in \overline{3, 10}$.

3.2 Эксперимент 2

Поскольку при любом значении параметра $q \geq 2$ верно соотношение (3), интересно получить приближенное значение константы β_q при различных значениях q. Результаты вычислений приведены в Таблице 5.

q	2	3	4	5	6	7
β_q	1.462	1.277	1.194	1.150	1.125	1.106
q	8	9	10	11	12	13
β_q	1.091	1.081	1.073	1.066	1.060	1.055

Таблица 5: Приближенное значение константы β_q

Гипотеза 1. *Последовательность* $\{\beta_q\}$ *монотонно стремится к единице при* q *стремящемся к бесконечности.*

Список литературы

[1] Воронин, В. П., Демакова, Е. В., "О числе независимых множеств для некоторых семейств графов", *Труды IV Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Красновидово, 19–25 июня 2000 г.)*, 2000, 145–149.

[2] Дайняк, А. Б., "О числе независимых множеств в полных q-арных деревьях", *Учёные записки Казанского государственного университета. Серия Физ.-матем. науки*, **151**:2 (2009), 59–64.

[3] Коршунов, А. Д., Сапоженко А. А., "О числе двоичных кодов с расстоянием 2", *Проблемы кибернетики*, **40** (1983), 111–130.

[4] Kalkin, N.J., Wilf, H.S., "The number of independent sets in a grid graph", *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **11**:1 (1997), 54–60.

[5] R. Euler, "The Fibonacci number of a grid graph and a new class of integer sequences", *Journal of Integer Sequences*, **8**:07.2.6 (2005), 1–12.

[6] R. Euler, P. Oleksik, Z. Skupien, "Counting maximal distance-independent sets in grid graphs", *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**:3 (2013), 531–557.

[7] Kirschenhofer, P., Prodinger, H., Tichy, R., "Fibonacci numbers of graphs II", *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.