Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в одном классе субкубических планарных графов

Дмитрий Валерьевич Сироткин

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики» в Нижнем Новгороде

dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

Это совместная работа с *Дмитрием Сергеевичем Малышевым*

Аннотация

Задача о независимом множестве для заданного обыкновенного графа состоит в вычислении размера наибольшего множества его попарно несмежных вершин. В данной работе мы доказываем полиномиальную разрешимость этой задачи для субкубических планарных графов, не содержащих порождённого дерева, получаемого отождествлением концов трёх путей длины 3,3,2, соответственно.

Ключевые слова: задача о независимом множестве, редукция графов, эффективный алгоритм.

1 Введение

В данной работе рассматривается алгоритмическая сложность задачи о независимом множестве (кратко, задачи НМ). Она продолжает цикл работ [3, 4, 5, 7, 8, 9, 10]. *Независимым множеством* (кратко, н.м.) обыкновенного графа называется любое множество его попарно несмежных вершин. *Наибольшее независимое множество* (кратко, н.н.м.) графа G — н.м. графа G с наибольшим количеством вершин, при этом размер н.н.м. графа G называется *числом независимости* G и обозначается через $\alpha(G)$. Задача НМ для заданных графа G и натурального числа k состоит в том, чтобы выяснить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geq k$. Задача НМ является классической NP-полной задачей.

Известны несколько алгоритмических инструментов для редукции графов при решении задачи НМ. Например, если в графе G вершина a *смежно поглощает* вершину b (т.е. $ab \in E(G)$ и $N(a) \supseteq N(b) \setminus \{a\}$), то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{a\})$. Это так называемое *правило смежностного поглощения*. Смежностное поглощение является частным представителем так называемых *сжатий* [1], т.е. отображений множества вершин графа в себя, не являющихся автоморфизмами, при которых любые две различные несмежные вершины переходят в различные несмежные вершины. Таким образом, сжатие преобразует граф в его порождённый подграф, при этом, очевидно, сохраняется число независимости. Граф H называется *порождённым подграфом* графа G, если H получается удалением некоторых вершин графа G. Граф H называется *минором* графа G, если H получается из G удалением вершин и рёбер, а также стягиванием рёбер.

Классом графов называется любое множество обыкновенных графов, замкнутое относительно изоморфизма. Класс графов мы будем называть *НМ-простым*, если задача НМ для графов из этого класса полиномиально разрешима. Класс графов с NP-полной задачей НМ мы будем называть *НМ-сложным*.

Класс называется *наследственным*, если он замкнут относительно относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{S}$ своих минимальных запрещённых порождённых подграфов, при этом принята запись $\mathcal{X} = Free(\mathcal{S})$. Наследственный класс называется *конечно определённым*, если множество его минимальных запрещённых порождённых подграфов конечно. *Минорно замкнутый* класс графов — такой класс, который вместе с каждым своим графом содержит все миноры этого графа. Любой минорно замкнутый класс может быть задан множеством своих запрещённых миноров. Например, класс планарных графов $\mathcal{P}$ является минорно замкнутым, множество его запрещённых миноров состоит из графов $K_{3,3}$ и K_5 по критерию Вагнера.

Триодом $T_{i,j,k}$ называется дерево, получаемое отождествлением трёх концевых вершин путей $P_{i+1}, P_{j+1}, P_{k+1}$, соответственно. Класс $\mathcal{T}$ состоит из всевозможных графов, каждая компонента связности которых является деревом с не более чем тремя листьями (т.е. триодом). В работе [3] было доказано, что любой конечно определённый класс $\mathcal{X}$, содержащий $\mathcal{T}$, является НМ-сложным. Это же верно, если вместо $\mathcal{X}$ рассматривать класс $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{X}$, где $\mathcal{P}(3)$ — множество *субкубических планарных графов*, т.е. планарных графов со степенями всех вершин не более чем 3. В той же работе [3] было выдвинуто предположение о том, что любой конечно определённый класс, не включающий $\mathcal{T}$, является НМ-простым. Для этого достаточно показать, что для любого графа $G \in \mathcal{T}$ класс $Free(\{G\})$ является НМ-простым. На настоящее время это доказано для любого графа $G \in \mathcal{T}$ с не более чем 5 вершинами. Сложностной статус задачи НМ не известен уже для класса $Free(\{P_6\})$.

Вместе с тем, было бы интересным исследовать сложность задачи НМ для классов вида $\mathcal{Y} \cap Free(\{G\}), G \in \mathcal{T}$, где $\mathcal{Y}$ — собственное наследственное подмножество множества всех графов. В работе [7] было доказано, что для любых d, i класс $\mathcal{D}(d) \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ является НМ-простым, где $\mathcal{D}(d)$ — класс графов со степенями всех вершин не более чем d. В работах [5, 8] было доказано, что для любого i класс $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{1,2,i}\})$ является НМ-простым. В работе [4] было доказано, что для любого i класс $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ является НМ-простым. В работе [10] было доказано, что для любого i класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,i}\})$ является НМ-простым. В работе [9] было доказано, что класс $\mathcal{D}(3) \cap Free(\{T_{2,2,2}\})$ является НМ-простым.

В настоящей работе мы доказываем НМ-простоту класса $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$.

2 Обозначения

1. P_k — простой путь с n вершинами, K_n — полный граф с n вершинами, $K_{n,m}$ — полный двудольный граф с n вершинами в одной доле и m вершинами в другой.

2. $\overline{a,b}$ — множество натуральных чисел $\{a, a+1, \ldots, b\}$.

3. $N(x)$ — окрестность вершины x.

4. $G \setminus V'$ — граф, получаемый из графа G удалением всех вершин из подмножества $V' \subseteq V(G)$.

5. $G[V']$ — подграф графа G, порождённый подмножеством $V' \subseteq V(G)$.

6. $[a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2]$ — сокращение для фразы «вершины $a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2$ порождают триод $T_{3,3,2}$ с множеством рёбер $\{ab_1, b_1b_2, b_2b_3, ac_1, c_1c_2, c_2c_3, ad_1, d_1d_2\}$».

7. Для рассматриваемых плоской укладки планарного графа и его порождённого цикла $(v_1, \ldots, v_k)$ обозначение $D(v_1, \ldots, v_k)$ означает область в укладке, ограниченную данным циклом.

3 Операция замены и её значение

В данной работе используются некоторые локальные преобразования графов, которые являются частным случаем так называемых схем замен, предложенных в работе [2]. В [2] рассматривается достаточно общий класс преобразований, при которых число независимости в точности сохраняется, но отмечается, что ничего принципиально нового не будет, если допустить изменение числа независимости на некоторую константу.

Пусть H_1 и H_2 — графы, $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$. Будем говорить, что H_1 и H_2 являются *α–подобными относительно* A, если существует такая константа c, что для любого $X \subseteq A$ выполняется равенство $\alpha(H_1 \setminus X) = \alpha(H_2 \setminus X) + c$.

Пусть G — некоторый граф, а H — некоторый его порождённый подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовём *H-отделяющим*, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus V(H)$.

Пусть H_1 и H_2 — графы, $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$, H_1 и H_2 являются α-подобными относительно A. Допустим, граф G содержит порождённый подграф H_1 с H_1-отделяющим множеством A. *Замена* H_1 *на* H_2 *в графе* G состоит в образовании графа G^* с множеством вершин $(V(G) \setminus V(H_1)) \cup V(H_2)$ и множеством ребер $(E(G) \setminus E(H_1)) \cup E(H_2)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если граф G^* — результат замены H_1 на H_2 в графе G, то $\alpha(G^*) = \alpha(G) + \alpha(H_2) - \alpha(H_1)$.*

Доказательство. Пусть S — н.н.м. графа G, $M = S \setminus V(H_1)$ и $X = \bigcup\limits_{x \in M} (N(x) \cap V(H_1))$. Поскольку $X \subseteq A$, то $\alpha(G) = |M| + \alpha(H_1 \setminus X)$. В графе G^*, если к множеству M добавить н.н.м. графа $H_2 \setminus X$, то получится н.м. мощности $|M| + \alpha(H_2 \setminus X)$. Следовательно, $\alpha(G^*) \geq |M| + \alpha(H_2 \setminus X) = \alpha(G) - \alpha(H_1 \setminus X) + \alpha(H_2 \setminus X) = \alpha(G) - \alpha(H_1) + \alpha(H_2)$. Аналогично доказывается обратное неравенство. $\square$

Операция замены является важнейшим инструментом из тех, которые мы будем использовать для получения основного результата этой работы.

4 Неприводимые графы и их свойства

4.1 Сжимаемые подграфы с малым отделяющим множеством

Пусть H — граф, $A \subseteq V(H)$, $B = V(H) \setminus A$. Обозначим через $\mathfrak{M}(H, A)$ семейство всех таких множеств $X \subseteq A$, что для всякого $Y \subset X$ выполняется неравенство $\alpha(G[B \cup Y]) < \alpha(G[B \cup X])$. Из определения α–подобия видно, что $c = \alpha(H_1) - \alpha(H_2)$, так что $\alpha(H_1) - \alpha(H_1 \setminus X) = \alpha(H_2) - \alpha(H_2 \setminus X)$ для любого $X \subseteq A$. Значит, при удалении из графов H_1 и H_2 вершин любого множества $X \subseteq A$ числа независимости изменяются одинаково. Отсюда следует, что $\mathfrak{M}(H_1, A) = \mathfrak{M}(H_2, A)$ для α–подобных графов H_1 и H_2 относительно множества A. Столь же очевидно и обратное, т.е. справедлив тот факт, что графы H_1 и H_2 являются α–подобными относительно $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}(H_1, A) = \mathfrak{M}(H_2, A)$.

Пару (H, A) назовём *вырожденной*, если объединение всех элементов множества $\mathfrak{M}(H, A)$ не равно A.

Лемма 2. *Если граф G содержит порождённый подграф H с H-отделяющим множеством A, (H, A) — вырожденная пара, то $\alpha(G \setminus \{x\}) = \alpha(G)$ для некоторой вершины $x \in A$.*

Доказательство. Пусть $x \in A$ и x не принадлежит ни одному из множеств семейства $\mathfrak{M}(H, A)$. Допустим, S — н.н.м. в графе G и $x \in S$. Множество $X = A \cap S$ не принадлежит семейству $\mathfrak{M}(H, A)$. Но тогда существует такое $Y \subset X$, что $x \notin Y$ и $\alpha(H[B \cup X]) = \alpha(H[B \cup Y]) = |S \cap V(H)|$. Пусть Z

— н.н.м. в графе $H[B \cup Y]$. Тогда $(S \setminus V(H)) \cup Z$ — н.м. в графе $G \setminus \{x\}$ мощности $\alpha(G)$. $\square$

В данном подразделе 3.1 мы будем предполагать, что пара (H, A) не является вырожденной.

Если $A = \{v_1, v_2\}$, то имеются ровно три возможных случая: (I) $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1, v_2\}\}$, (II) $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$, (III) $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$. Соответственно, для каждого из данных трёх случаев определим граф H' следующим образом: (I) H' — простой путь (v_1, v_3, v_2), (II) H' — полный граф на двух вершинах v_1, v_2, (III) H' — пустой граф на двух вершинах v_1 и v_2. В каждом из этих случаев H и H' являются α-подобными относительно A.

Лемма 3. *Предположим, что $H = (V, E)$ — связный порождённый подграф графа G, содержащий H-отделяющее множество $A = \{v_1, v_2\}$, и $|V(H)| \geq 3$. Пусть $G^*(t)$ — результат замены H на $H'(t)$ в графе G, где граф $H'(t)$ определяется правилом с номером t. Тогда для любого t граф $G^*(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$, если граф G не содержит разделяющих клик и принадлежит тому же множеству.*

Доказательство. Очевидно, что $G^*(t) \in \mathcal{P}(3)$. Предположим, что граф $G^*(t)$ содержит порождённый триод $T_{3,3,2}$. Поскольку G не содержит разделяющих клик и $|V(H)| \geq 3$, то v_1v_2 не является ребром графа G. Отсюда и ввиду связности графа H следует, что в графе H между вершинами v_1 и v_2 есть порождённый путь длины не менее чем 2. Поэтому G содержит порождённый подграф $T_{3,3,2}$ в каждом из случаев I–III по определению графа $H'(t)$. Получаем противоречие. Значит, предположение было неверным. $\square$

Будем называть порождённый связный подграф H некоторого графа 2-*сжимаемым*, если H содержит H-отделяющее множество ровно с двумя вершинами и $|V(H)| \geq 4$.

Пусть H — граф, а v_1, v_2, v_3 — некоторые три его вершины, образующие множество A. Далее, в каждом из случаев мы определяем граф H':

(I) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$, то H' — простой путь $(v_1, v_3, v_4, v_5, v_2)$

(II) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1, v_2, v_3\}\}$, то H' — простой путь $(v_1, v_4, v_2, v_5, v_3)$

(III) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2, v_3\}\}$, то H' — простой путь (v_1, v_2, v_4, v_3)

(IV) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$, то H' — дерево с вершинами v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 и рёбрами $v_1v_4, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_3$

(V) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}$, то H' — граф с вершинами $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ и рёбрами $v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_5, v_5v_6, v_6v_3$

(VI) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$, то H' — полный граф с вершинами v_1, v_2, v_3

(VII) если $\mathfrak{M}(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$, то H' — простой путь $(v_1, v_4, v_5, v_3, v_2)$

В каждом из этих случаев H и H' являются α-подобными относительно A.

Будем говорить, что порождённый подграф H некоторого графа является $(3,t)$-*сжимаемым*, если H-отделяющее множество содержит ровно три вершины, причём $|V(H)| \geq 4$ (если $t =$VI), или $|V(H)| \geq 5$ (если $t =$III), или $|V(H)| \geq 6$ (если $t \in$ {I,II,IV,VII}), или $|V(H)| \geq 7$ (если $t =$V). В дальнейшем, мы будем применять каждое из описанных семи сжатий к графам из класса $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ так, что результат снова будет принадлежать этому же классу (как правило, результат применения замены к графу G будет порождённым пографом графа G).

Пусть H — граф, а v_1, v_2, v_3, v_4 — некоторые четыре его вершины, образующие множество A. Далее, в каждом из случаев мы определяем граф H':

(I) если $\mathfrak{M}(H,A) = \{\{v_1\},\{v_2\},\{v_3\},\{v_4\},\{v_1,v_2\},\{v_3,v_4\}\}$, то H' — простой цикл (w_1, w_3, w_2, w_4)

(II) если $\mathfrak{M}(H,A) = \{\{v_1\},\{v_2\},\{v_3\},\{v_4\},\{v_1,v_3\},\{v_1,v_4\},\{v_2,v_3\},$ $\{v_2,v_4\}\}$, то H' — граф с вершинами w_1, w_2, w_3, w_4 и рёбрами w_1w_2, w_3w_4

(III) если $\mathfrak{M}(H,A) = \{\{v_2,v_4\},\{v_1,v_3,v_4\}\}$, H' — граф с вершинами $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$ и рёбрами $w_1w_5, w_5w_6, w_6w_2, w_6w_7, w_7w_3, w_3w_8,$ w_8w_2, w_8w_4

(IV) если $\mathfrak{M}(H,A) = \{\{v_2,v_4\},\{v_1,v_3\}\}$, то H' — граф с вершинами $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$ и рёбрами $w_1w_5, w_5w_6, w_6w_2, w_6w_7, w_7w_3, w_3w_4,$ w_4w_8, w_2w_8

В каждом из этих случаев H и H' являются α-подобными относительно A.

Будем говорить, что порождённый подграф H некоторого графа является $(4,t)$-*сжимаемым*, если H-отделяющее множество содержит ровно четыре вершины, причём $|V(H)| \geq 5$ (если $t \in$ {I,II}) или $|V(H)| \geq 9$ (если $t \in$ {III,IV}). В дальнейшем, мы будем применять каждое из описанных четырёх сжатий к графам из класса $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ так, что результат снова будет принадлежать этому же классу (как правило, результат применения замены к графу G будет порождённым пографом графа G).

Мы будем записывать H-отделяющее множество в виде набора (который будем называть H-*отделителем*), а не в виде множества. Мы предполагаем, что i-й элемент набора переходит в вершину v_i при замене.

4.2 Понятие неприводимого графа и его значение

Связный граф G будем называть *неприводимым*, если одновременно выполнены следующие условия:

1. Граф G принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$.

2. Граф G не содержит разделяющих клик.

3. Граф G не содержит порождённого подграфа H и H-отделяющего множества A таких, что $|V(H)| \leq 12, |A| \leq 4$ и (H,A) вырождена.

4. Граф G не содержит связного порождённого подграфа H_1 с не более чем 12 вершинами такого, что к G можно применить операцию замены графа H_1 на некоторый граф H_2 такой, что $|V(H_2)| < |V(H_1)|$ и результат замены принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$.

Известно, что задача НМ для любого наследственного класса графов $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче для части $\mathcal{X}$, состоящей из всевозможных связных графов из $\mathcal{X}$, не содержащих разделяющих клик [3]. Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$. Перебором всех его подмножеств вершин с не более чем 12 вершинами и перебором всех графов с не более чем 11 вершинами, а также решением не более чем $2^4 = 16$ задач НМ для каждого из графов с не более чем 12 вершинами можно за время $O(|V(G)|^{12})$ проверить, удовлетворяет ли граф G требованиям пунктов 3 и 4. Принадлежность графа с n вершинами и m рёбрами классу $\mathcal{P}(3)$ распознаётся за время $O(n+m)$ [6]. Принадлежность графа с n вершинами классу $Free(\{T_{3,3,2}\})$ распознаётся за время $O(n^9)$ перебором всех 9-элементных подмножеств вершин и проверкой порождаемости подграфа $T_{3,3,2}$ одним из таких подмножеств. Из данных фактов и леммы 2 следует, что задача НМ для графов из класса $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ полиномиально сводится к неприводимым графам из этого класса.

4.3 Некоторые вспомогательные результаты

Лемма 4. *Для любого порождённого 5-цикла неприводимого графа G не менее четырёх вершин цикла имеют степень 3.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что в графе G существует порождённый цикл $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, в котором либо $deg(x_3) = deg(x_5) = 2$, либо $deg(x_4) = deg(x_5) = 2$. В первом случае пара $(G[\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}], \{x_1, x_2, x_4\})$ является вырожденной. Во втором случае подграф $H = G[\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}]$ с H-отделителем (x_1, x_2, x_3) является (3,VI)-сжимаемым. Результат сжатия, обозначаемый через G^*, является минором графа G, т.к. он получается стягиванием рёбер x_1x_5, x_4x_3. Поэтому $G^* \in \mathcal{P}(3)$. Граф G^* не содержит порождённого триода $T_{3,3,2}$, для этого достаточно показать, что никакой порождённый триод $T_{3,3,2}$ графа G^* не содержит ребра x_1x_3. Действительно, если такой триод $T_{3,3,2}$ в графе G^* существует, то граф G содержит порождённый триод $T_{3,3,2}$, одним из рёбер которого является ребро x_1x_5 или ребро x_3x_4. □

Лемма 5. *Пусть G — планарный субкубический граф, C_1^*, C_2^*, C_3^* — три попарно различных порождённых цикла графа G таких, что каждое из множеств $E(C_1^*) \cap E(C_2^*), E(C_2^*) \cap E(C_3^*), E(C_1^*) \cap E(C_3^*)$ порождает в G простой путь. Пусть существуют e_1^*, e_2^*, e_3^* — три ребра графа G, в указанном порядке образующие порождённый путь, причём $e_1^* \in (E(C_1^*) \cap E(C_2^*)) \setminus E(C_3^*), e_2^* \in E(C_1^*) \cap E(C_2^*) \cap E(C_3^*), e_3^* \in (E(C_2^*) \cap E(C_3^*)) \setminus E(C_1^*)$. Тогда для любой плоской укладки графа G справедливо одно из включений: $D(C_3^*) \subset D(C_2^*)$ или $D(C_1^*) \subset D(C_2^*)$.*

Доказательство Леммы 5 приведено в приложении.

5 О несуществовании неприводимых графов, содержащих достаточно большие порождённые триоды

Целью этого раздела работы является доказательство того, что не существует неприводимого графа, содержащего порождённый триод $T_{2,2,10}$. Предположим, что такой граф $G = (V, E)$ существует. Рассмотрим его порождённый триод $T_{2,2,10}$. Обозначим вершину триода степени три через o, вершины ветви с десятью вершинами обозначим через $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ (в порядке удаления от o), вершины других двух ветвей через b_1, b_2 и c_1, c_2 (также в порядке удаления от o).

В следующих трёх леммах мы покажем, что равенство $N(b_2) \setminus \{b_1\} = N(c_2) \setminus \{c_1\}$ невозможно. При доказательстве данных лемм мы предполагаем противное и обозначаем множество $N(b_2) \setminus \{b_1\}$ через N'. Это множество не может быть пустым, иначе b_1 образует разделяющую клику графа G. Очевидно, что N' состоит либо из одной вершины x, либо из двух вершин x и y. При доказательстве следующих трёх лемм мы будем предполагать, что x и y не смежны, иначе подграф $G[\{b_2, c_2, x, y\}]$ является 2-сжимаемым. Мы также будем предполагать, что $deg(b_1) \geq deg(c_1)$, поскольку это предположение не уменьшает общности.

Лемма 6. *Каждый элемент множества N' не смежен ни с одной вершиной множества $\{a_1, a_2, a_3\}$.*

Доказательство. Предположим, что некоторый элемент $x \in N'$ имеет соседа во множестве $\{a_1, a_2, a_3\}$. Очевидно, что этим соседом $a_{i'}$ может быть только a_1, иначе $[a_{i'}, a_{i'+1}, a_{i'+2}, a_{i'+3}, a_{i'-1}, a_{i'-2}, a_{i'-3}, x, c_2]$, где $a_0 = o, a_{-1} = b_1$.

Предположим, что множество N' состоит из x и y. Если $yb_1 \in E$, то $[a_1, a_2, a_3, a_4, x, b_2, y, o, c_1]$. Понятно, что y имеет соседа $a_{i''}$ во множестве $\{a_2, a_3, a_4\}$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, x, c_2, y, o, b_1]$. Но тогда $[a_{i''}, a_{i''+1}, a_{i''+2}, a_{i''+3},$
$a_{i''-1}, a_{i''-2}, a_{i''-3}, y, c_2]$.

Предположим теперь, что $N' = \{x\}$. Существует вершина $b_1' \in N(b_1) \setminus \{b_2, o\}$, иначе x и a_1 образуют разделяющую клику графа G. Рассмотрим сначала случай, когда $b_1'c_1 \in E$. Очевидно, что b_1' должна быть смежна с некоторой вершиной $a_{i'''} \in \{a_2, a_3, a_4\}$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_1', x, c_2]$. Понятно, что $i''' \neq 2$, иначе $\{b_1', a_2\}$ — разделяющая клика G. Тогда $[a_{i'''}, a_{i'''+1}, a_{i'''+2}, a_{i'''+3}, b_1', b_1, b_2, a_{i'''-1}, a_{i'''-2}]$.

Рассмотрим теперь случай, когда b_1' и c_1 не смежны. Понятно, что b_1' смежна хотя бы с одной из вершин a_2 и a_3, иначе $[x, a_1, a_2, a_3, b_2, b_1, b_1', c_2, c_1]$. Можно считать, что b_1' не смежна с a_2, иначе $\{x, a_1\}$ — разделяющая клика G (если $deg(c_1) = 2$) или c_1 имеет соседа, не принадлежащего множеству $\{o, c_2, b_1'\}$ и смежного с a_3, причём b_1' и этот сосед равноправны с точки зрения рассуждений. Иными словами, можно предполагать, что $b'_1a_3 \in E$. Предположим, что c_1 имеет соседа c'_1, отличного от каждой из вершин o, c_2, b'_1. Тогда либо $b'_1c'_1 \in E$, либо $c'_1a_2 \in E$, иначе $[x, b_2, b_1, b'_1, c_2, c_1, c'_1, a_1, a_2]$. Предположим, что $b'_1c'_1 \in E$. Если $c'_1a_2 \notin E$, то $[b'_1, c'_1, c_1, c_2, a_3, a_2, a_1, b_1, b_2]$. Если же $c'_1a_2 \in E$, то $\{b'_1, a_3\}$ — разделяющая клика G. Предположим, что $b'_1c'_1 \notin E$. Тогда c'_1 должна быть смежна с a_2, иначе $[x, b_2, b_1, b'_1, c_2, c_1, c'_1, a_1, a_2]$. Понятно, что c'_1 должна быть смежна с некоторой вершиной a_i, где $i \in \{4, 5\}$, иначе $[a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, x, b_2, c'_1, c_1]$. Тогда $[a_1, a_2, c'_1, a_i, o, b_1, b'_1, x, c_2]$.

Осталось рассмотреть случай, когда $deg(c_1) = 2$. Вершина a_2 имеет соседа a'_2, отличного от каждой из вершин a_1 и a_3, т.к. иначе b'_1 и a_3 образуют разделяющую клику графа G. Вершины a'_2 и b'_1 не смежны, иначе $[a_3, a_4, a_5, a_6, b'_1, b_1, b_2, a_2, a_1]$. Но тогда $[x, b_2, b_1, b'_1, a_1, a_2, a'_2, c_2, c_1]$.

Во всех случаях мы получили противоречие. Значит, наше предположение о существовании вершины x было неверным. □

Лемма 7. *Если* $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$ *и* $c'_1 \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$, *то* $b'_1 = c'_1$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть v — произвольная вершина из множества N'. По предыдущей лемме, никакая из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$ не является соседом v. Не уменьшая общности, можно рассматривать только два случая: 1). $b'_1v \notin E, c'_1v \notin E$ и 2). $b'_1v \notin E, c'_1v \in E$.

Рассмотрим первый случай. Каждая из вершин b'_1 и c'_1 имеет соседа во множестве $\{a_1, a_2, a_3\}$, иначе $[o, c_1, c_2, v, a_1, a_2, a_3, b_1, b'_1]$ или $[o, b_1, b_2, v, a_1, a_2, a_3, c_1, c'_1]$. Можно предполагать, что $b'_1a_3 \in E$ или что $b'_1a_2 \in E, c'_1a_1 \in E, b'_1a_3 \notin E, c'_1a_3 \notin E$. В первом подслучае $[b_1, b_2, v, c_2, b'_1, a_3, a_4, o, a_1]$ (если $b'_1a_4 \notin E, b'_1a_1 \notin E$), или $[b_1, b_2, v, c_2, b'_1, a_4, a_5, o, a_1]$ (если $b'_1a_4 \in E, b'_1a_1 \notin E$), или $[b_1, o, c_1, c'_1, b'_1, a_3, a_4, b_2, v]$ (если $b'_1a_1 \in E$). Во втором подслучае вершины b'_1 и c'_1 не смежны, иначе $[b'_1, b_1, b_2, v, a_2, a_3, a_4, c'_1, c_1]$. Тогда $[b_1, b'_1, a_2, a_3, o, c_1, c'_1, b_2, v]$.

Рассмотрим второй случай. Если $N' = \{v\}$, то подграф $H_1 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, c'_1, v\}]$ с H_1-отделителем (o, c'_1, b_1) является (3,I)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G. Предположим теперь, что $N' = \{v, u\}$. Если $uc'_1 \in E$, то подграф $G[\{b_2, c_2, v, u, c_1, c'_1\}]$ является 2-сжимаемым. Если $uc'_1 \notin E$, то либо $ub'_1 \notin E$, либо $ub'_1 \in E$. В первом из этих подслучаев имеет место противоречие по аналогии с первым случаем. Во втором случае подграф $H_2 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, v, u, b'_1, c'_1\}]$ с H_2-отделителем (b'_1, o, c'_1) является (3,II)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением u, v, b_2, c_2 из G.

Во всех случаях мы получили противоречие. Значит, наше предположение было неверным. □

Лемма 8. *Выполняется неравенство* $N(b_2) \setminus \{b_1\} \neq N(c_2) \setminus \{c_1\}$.

Доказательство. Предположим противное. Возможны только следующие два случая:

1. $N' = \{x\}$.
2. $N' = \{x, y\}$, причём вершины x и y не смежны.

Рассмотрим первый случай. Если $deg(x) = 2$, то существуют вершины $b_1' \in N(b_1) \backslash \{o, b_2\}$ и $c_1' \in N(c_1) \backslash \{o, c_2\}$, иначе $\{o, b_1\}$ или $\{o, c_1\}$ является разделяющей кликой графа G. По предыдущей лемме выполнено соотношение $b_1' = c_1'$. Тогда подграф $G[\{b_1', o, b_1, c_1, b_2, c_2, x\}]$ является 2-сжимаемым.

Будем считать, что $deg(x) = 3$. Возможны только следующие подслучаи:

1.1. $deg(b_1) \in \{2, 3\}, deg(c_1) = 2$. Тогда подграф $H_1 = G[\{o, b_1, c_1, b_2, c_2, x\}]$ с H_1-отделителем (o, b_1, x) является (3,III)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G.

1.2. $deg(b_1) = 3, deg(c_1) = 3$. В этом подслучае b_1 и c_1 смежны с одной и той же вершиной $p \neq o$ по предыдущей лемме. Понятно, что p и x не смежны, иначе $\{o\}$ — разделяющая клика G. Тогда подграф $H_2 = G[\{o, p, b_1, c_1, b_2, c_2, x\}]$ с H_2-отделителем (o, p, x) является (3,IV)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G.

Рассмотрим второй случай. Не уменьшая общности будем считать, что $deg(x) \geq deg(y)$. Возможны следующие три подслучая:

2.1. $deg(b_1) = deg(c_1) = 2$. Если $deg(x) = 2$ и $deg(y) = 2$, то o образует разделяющую клику G. Если $deg(x) = 3$, то это вариант полностью эквивалентен подслучаю 1.2.

2.2. $deg(b_1) = 3, deg(c_1) = 2$. Если $deg(x) = deg(y) = 2$, то $\{o, b_1\}$ — разделяющая клика G. Если $deg(x) = 3$ и $deg(y) = 2$, то подграф $H_3 = G[\{o, b_1, c_1, b_2, c_2, x, y\}]$ с H_3-отделителем (b_1, x, o) является (3,I)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_2 и y из G.

Предположим, что $deg(x) = deg(y) = 3$. Из соображений симметрии можно считать, что в некоторой плоской укладке графа G вершина y лежит внутри области $D' = D(o, c_1, c_2, x, b_2, b_1)$. Понятно, что если $b_1' \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$, то b_1' смежна хотя бы с одной из вершин a_1, a_2, a_3, иначе $[o, c_1, c_2, x, a_1, a_2, a_3, b_1, b_1']$. Следовательно, $b_1', a_1, \ldots, a_{10}$ либо одновременно лежат внутри D', либо одновременно лежат вне D'. Если они лежат внутри D', то они обязаны лежать внутри области $D'' = D(o, c_1, c_2, y, b_2, b_1)$. Следовательно, сосед y, отличный от b_2 и от c_2, обязан принадлежать D'', иначе $\{b_1, o\}$ — разделяющая клика G. Поэтому $\{x\}$ — разделяющая клика графа G. Если $b_1, a_1, \ldots, a_{10}$ не принадлежат D', то сосед вершины x, отличный от вершин b_2 и c_2, должен лежать вне D', иначе $\{b_1, o\}$ — разделяющая клика графа G. Следовательно, y образует разделяющую клику G.

2.3. $deg(b_1) = deg(c_1) = 3$. Вершины b_1 и c_1 смежны с общей вершиной $q \neq o$ по предыдущей лемме. Если $qx \in E$ или $qy \in E$, то подграф $G[\{o, q, b_1, c_1, b_2, c_2, x, y\}]$ является 2-сжимаемым. Если же $\{o, q, x, y\}$ — независимое множество графа G, то подграф $H_4 = G[\{o, q, b_1, c_1, b_2, c_2, x, y\}]$ с H_4-отделителем (o, q, x, y) является (4,I)-сжимаемым. Результат сжатия является минором графа G, т.к. он получается стягиванием рёбер $b_1b_2, c_1c_2, b_2y, xc_2$. Следовательно, он будет субкубическим планарным графом. Нетрудно проверить, что если полученный граф содержит порождённый триод $T_{3,3,2}$, то и граф G содержит порождённый триод $T_{3,3,2}$.

Итак, во всех случаях мы получили противоречие. Следовательно, неприводимого графа G с условием $N(b_2) \setminus \{b_1\} = N(c_2) \setminus \{c_1\}$ не существует. □

Из Лемм 6–8 следует, что существует вершина графа G, не принадлежащая триоду $T_{2,2,10}$ и смежная ровно с одной из вершин b_2 и c_2. Не уменьшая общности мы будем считать, что эта вершина смежна с b_2. Обозначим данную вершину через d. Понятно, что d обязана быть смежна хотя бы с одной вершиной из множества $\{b_1, c_1, a_1, a_2, a_3\}$, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2]$.

Лемма 9. *Равенство* $N(d) \cap \{b_1, c_1, a_1, a_2, a_3\} = \{b_1\}$ *невозможно.*

Доказательство. Предположим противное. Понятно, что $deg(b_2) = deg(d) = 3$, иначе G содержит разделяющую клику $\{b_1, b_2\}$. Поэтому можно считать, что существуют вершины $b'_2 \in N(b_2) \setminus \{b_1, d\}$ и $d' \in N(d) \setminus \{b_1, b_2\}$. Если $d' = b'_2$, то подграф $G[\{b_1, b_2, d, d'\}]$ является 2-сжимаемым. Поэтому мы предполагаем, что $b'_2 \neq d$. Каждая из вершин b'_2 и d' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин c_1, c_2, a_1, a_2, a_3, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, d, d', c_1, c_2]$ или $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b'_2, c_1, c_2]$. Поэтому хотя бы одна из вершин b'_2 и d' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_1, a_2, a_3, иначе во множестве $\{b'_2, d'\}$ существует вершина (скажем, d'), имеющая во множестве $\{c_1, c_2\}$ ровно одного соседа – вершину c_2. Значит, определено число $k = \max(\{i \in \overline{1,3}|\ a_i b'_2 \in E\} \cup \{i \in \overline{1,3}|\ a_i d' \in E\})$. Можно считать, что d' является соседом вершины a_k. Рассмотрим отдельно каждый из возможных случаев: $k = 1, k = 2, k = 3$.

1). Предположим, что $k = 1$. Очевидно, что $b'_2 c_1 \in E$, иначе $b'_2 c_2 \in E, b'_2 c_1 \notin E$ и $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b'_2, b_1, d]$. Поэтому $[a_1, o, c_1, c_2, d', d, b_2, a_2, a_3]$ (если $c_2 d' \notin E$), или $[d', c_2, c_1, b'_2, a_1, a_2, a_3, d, b_1]$ (если $c_2 d' \in E, c_2 b'_2 \notin E$), или $[a_1, a_2, a_3, a_4, d', c_2, b'_2, o, b_1]$ (если $c_2 d' \in E, c_2 b'_2 \in E$).

2). Предположим, что $k = 2$. Если $a_1 d' \in E$, то подграф $H = G[\{o, b_1, b_2, d, d', a_1, a_2\}]$ с H-отделителем (o, b_2, a_2) является (3,V)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением a_1 из G. Будем считать, что $d' a_1 \notin E$. Вершина d' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_3, a_4, a_5, иначе $[a_2, d', d, b_2, a_3, a_4, a_5, a_1, o]$. Более того, вершина d' смежна именно с a_3, иначе $[d', a_2, a_1, o, a_4, a_5, a_6, d, b_2]$ (если $d' a_4 \in E$) или $[d', a_2, a_1, o, a_5, a_6, a_7, d, b_2]$ (если $d' a_5 \in E$). Если $deg(a_1) = 2$, то $(G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, d'\}], \{o, b_2, a_3\})$ является вырожденной. Рассмотрим два возможных варианта, когда $b'_2 a_1 \in E$ и $b'_2 a_1 \notin E$.

2.1. Предположим, что $b'_2 a_1 \in E$. Тогда если $b'_2 c_1 \in E$, то подграф $G[\{o, a_1, a_2, a_3, c_1, b_1, b_2, b'_2, d, d'\}]$ является 2-сжимаемым. Если $b'_2 c_2 \in E$, $b'_2 c_1 \notin E$, то $deg(c_1) = 2$. Действительно, если есть вершина $c'_1 \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$, то $[a_1, o, c_1, c'_1, b'_2, b_2, d, a_2, a_3]$. Поэтому подграф $G[\{o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b_1, b_2, b'_2, d, d'\}]$ является 2-сжимаемым. Если $b'_2 c_1 \notin E$ и $b'_2 c_2 \notin E$, то $[a_1, o, c_1, c_2, b'_2, b_2, d, a_2, a_3]$.

2.2. Предположим теперь, что $b'_2 a_1 \notin E$. Тогда обязательно $b'_2 c_1 \in E$, иначе $b'_2 c_2 \in E, b'_2 c_1 \notin E$ и $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b'_2, b_1, d]$. Но тогда $(G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b'_2, d, d', c_1\}], \{a_3, a_1, c_1, b'_2\})$ является вырожденной.

3). Предположим, что $k = 3$. По предыдущему случаю будем считать, что $d' a_2 \notin E$. Понятно, что $d' a_1 \notin E$, иначе $[d', a_3, a_4, a_5, a_1, o, c_1, d, b_2]$. Вершина d' должна быть смежна с одной из вершин a_4, a_5, иначе $[a_3, a_2, a_1, o, d', d, b_2, a_4, a_5]$. Вершина d' должна быть смежна именно с a_4, иначе

$d'a_5 \in E, d'a_4 \notin E$ и $[d', a_5, a_6, a_7, a_3, a_2, a_1, d, b_2]$. Рассмотрим два варианта, когда $deg(a_2) = 2$ и когда $deg(a_2) = 3$.

3.1. Предположим, что существует вершина $a'_2 \in N(a_2) \setminus \{a_1, a_3\}$.

3.1.1. Предположим, что $a'_2 a_1 \notin E$. Тогда a'_2 должна иметь соседа во множестве $\{c_1, c_2\}$, иначе $[o, a_1, a_2, a'_2, b_1, d, d', c_1, c_2]$. Если $a'_2 c_2 \in E$ и $a'_2 a_5 \notin E$, то $[a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, o, b_1, a'_2, c_2]$. Если $a'_2 c_2 \in E$ и $a'_2 a_5 \in E$, то $[a_2, a'_2, a_5, a_6, a_3, d', d, a_1, o]$. Если $a'_2 c_1 \in E$ и $a'_2 c_2 \notin E$, то $b'_2 c_2 \in E$ и $b'_2 a_1 \in E$, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b'_2, c_1, c_2]$. Тогда $[a_1, a_2, a_3, a_4, b'_2, b_2, d, o, c_1]$.

3.1.2. Предположим, что $a'_2 a_1 \in E$. Тогда $deg(a'_2) = 3$, иначе $\{a_1, a_2\}$ — разделяющая клика G. Ясно, что $b'_2 c_1 \in E$, иначе $b'_2 c_2 \in E, b'_2 c_1 \notin E$ и $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b'_2, b_1, d]$. Пусть a''_2 — элемент множества $N(a'_2) \setminus \{a_1, a_2\}$. Если $a''_2 = b'_2$, то подграф $G[\{o, a_1, a_2, a_3, a_4, a'_2, b_1, b_2, d, d', c_1, b'_2\}]$ является 2-сжимаемым. Если $a''_2 \neq b'_2$, то b'_2 и a''_2 должны быть смежными, иначе $[o, a_1, a'_2, a''_2, b_1, d, d', c_1, b'_2]$. Но тогда $[b'_2, a''_2, a'_2, a_2, b_2, d, d', c_1, o]$.

3.2. Предположим, что $deg(a_2) = 2$. Тогда подграф $(G[\{o, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, d, d'\}], \{a_1, o, b_2, a_4\})$ является вырожденной. □

Доказательство следующих двух лемм выдержано в духе проведённых ранее доказательств и выведено в приложение.

Лемма 10. *Равенство $N(d) \cap \{b_1, c_1, a_1, a_2, a_3\} = \{c_1\}$ невозможно.*

Лемма 11. *Вершина d не может быть смежна с одной из вершин a_1, a_2, a_3 или быть одновременно смежна с вершинами b_1 и c_1.*

Отметим, что из лемм 8–11 следует, что любой неприводимый граф обязательно принадлежит классу $Free(\{T_{2,2,10}\})$.

6 Основной результат

Теорема 1. *Класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ является НМ-простым.*

Доказательство. Из лемм 8–11 следует, что любой неприводимый граф обязательно не содержит ни одного порождённого триода $T_{2,2,10}$. Следовательно, задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,10}\})$. Класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,10}\})$ является НМ-простым [10]. Следовательно, класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ тоже является НМ-простым. □

Список литературы

[1] **Алексеев В. Е.** О сжимаемых графах // Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 36. С. 23–31.

[2] **Алексеев В. Е., Лозин В. В.** О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости // Дискретный анализ и исследование операций. 1998. Т. 5, No 1. С. 3–19.

[3] **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. 2003. Vol. 132, No. 1–3. P. 17–26.

[4] **Alekseev V. E., Lozin V. V., Malyshev D. S., Milanic M.** The maximum independent set problem in planar graphs // Proc. 33th Int. Symp. on Mathematical Foundations of Computer Science (Torun, August 25–29, 2008). Berlin: Springer-Verlag, 2008. P. 96–107.

[5] **Alekseev V. E., Malyshev D. S.** Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2008. Vol. 3, No 1. P. 1–5.

[6] **Hopcroft J., Tarjan R. E.** Efficient planarity testing // Journal of the Association for Computing Machinery. 1974. Vol. 21, No 4. P. 549–568.

[7] **Lozin V. V., Milanic M.** Maximum independent sets in graphs of low degree// Proc. 18 ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (New Orleans, January 7–9, 2007). Philadelphia: SIAM, 2007. P. 874–880.

[8] **Lozin V. V., Milanic M.** On the maximum independent set problem in subclasses of planar graphs // Journal of Graph Algorithms and Applications. 2010. Vol. 14. No 2. P. 269–286.

[9] **Lozin V. V., Monnot J., Ries B.** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs // Journal of Discrete Algorithms. 2015. Vol. 31. P. 104–112.

[10] **Malyshev D. S.** Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2013. Vol. 7, No 4. P. 537–548.

7 Приложение

Лемма 5. *Пусть G — планарный субкубический граф, C_1^*, C_2^*, C_3^* — три попарно различных порождённых цикла графа G таких, что каждое из множеств $E(C_1^*) \cap E(C_2^*), E(C_2^*) \cap E(C_3^*), E(C_1^*) \cap E(C_3^*)$ порождает в G простой путь. Пусть существуют e_1^*, e_2^*, e_3^* — три ребра графа G, в указанном порядке образующие порождённый путь, причём $e_1^* \in (E(C_1^*) \cap E(C_2^*)) \setminus E(C_3^*), e_2^* \in E(C_1^*) \cap E(C_2^*) \cap E(C_3^*), e_3^* \in (E(C_2^*) \cap E(C_3^*)) \setminus E(C_1^*)$. Тогда для любой плоской укладки графа G справедливо одно из включений: $D(C_3^*) \subset D(C_2^*)$ или $D(C_1^*) \subset D(C_2^*)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную плоскую укладку графа G. Достаточно рассматривать два случая, т.е. когда $D(C_2^*) \subset D(C_1^*)$ или $D(C_2^*) \nsubseteq D(C_1^*), D(C_1^*) \nsubseteq D(C_2^*)$. Поскольку для любых различных i и j множество $E(C_i^*) \cap E(C_j^*)$ порождает в G простой путь и G является субкубическим планарным, то множество $D(C_i^*) \cap D(C_j^*)$ представляет собой жорданову кривую. Пусть P — простой путь, порождаемый множеством рёбер $E(C_1^*) \cap E(C_2^*)$. Ясно, что $e_1^*, e_2^* \in E(P)$. Т.к. $e_3^* \notin E(C_1^*)$, то $e_3^* \notin E(P)$. Понятно, что e_2^* — концевое ребро пути P, иначе e_2^*, e_3^* и ребро P, соседнее с e_2^* и отличное от e_1^*, имеют общую вершину и принадлежат C_2^*. Напомним, что $D(C_2^*) \cap D(C_3^*)$ — жорданова кривая, частью которой являются рёбра e_2^*, e_3^* и не является ребро e_1^*, причём G является субкубическим планарным. Отсюда, очевидно, следует, что $D(C_3^*) \subset D(C_2^*)$ в обоих возможных случаях, т.е. когда $D(C_2^*) \subset D(C_1^*)$ или $D(C_2^*) \not\subseteq D(C_1^*), D(C_1^*) \not\subseteq D(C_2^*)$. $\square$

Лемма 10. *Равенство* $N(d) \cap \{b_1, c_1, a_1, a_2, a_3\} = \{c_1\}$ *невозможно.*

Доказательство. Предположим противное. Очевидно, что $deg(c_2) \geq 2$, иначе c_1 образует разделяющую клику G. Предположим, что вершина e — произвольный элемент множества $N(c_2) \setminus \{c_1\}$. Очевидно, что $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} \neq \emptyset$, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e, b_1, b_2]$. Если $ea_3 \in E, ea_1 \notin E, ea_2 \notin E$, то e должна быть смежна с некоторой вершиной a_i, где $i \in \overline{4,6}$, иначе $[a_3, a_4, a_5, a_6, a_2, a_1, o, e, c_2]$. Но тогда $[c_1, c_2, e, a_i, o, a_1, a_2, d, b_2]$. Если $ea_2 \in E$ и $ea_1 \notin E, ea_3 \notin E, eb_1 \notin E$, то e должна быть смежна с некоторой вершиной a_i, где $i \in \overline{4,5}$, иначе $[a_2, a_1, o, b_1, a_3, a_4, a_5, e, c_2]$. Тогда $[e, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, c_2, c_1, d, a_2, a_1]$. Если $ea_1 \in E, ea_2 \notin E, ea_3 \notin E, eb_1 \notin E, eb_2 \notin E$, то $ea_4 \in E$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_2, e, c_2]$. Тогда $[e, a_4, a_5, a_6, c_2, c_1, d, a_1, a_2]$.

Из рассуждений, приведённых выше, следует, что возможны только следующие случаи: 1). $ea_1 \in E, ea_2 \in E$, 2). $ea_1 \in E, ea_3 \in E$, 3). $ea_2 \in E, ea_3 \in E$, 4). $ea_2 \in E, eb_1 \in E$, 5). $ea_1 \in E, eb_1 \in E$, 6). $ea_1 \in E, eb_2 \in E$, 7). $eb_1 \in E, ed \in E$, 8). $eb_2 \in E, ed \in E$, 9). $eb_1 \in E, eb_2 \in E$, 10). $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}$, 11). $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$.

Вначале рассмотрим случаи, когда e смежна с некоторыми двумя элементами множества $\{b_1, b_2, d\}$. Понятно, что в каждом таком случае степень каждой из вершин $o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e$ равна 3, иначе порождаемый ими граф является 2-сжимаемым. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G. Очевидно, что c_2 и e либо одновременно лежат в области $D(o, b_1, b_2, d, c_1)$, либо вне её.

Предположим, что $eb_1 \in E, eb_2 \in E$. Дополнительно предположим, что вершины c_2 и e лежат внутри $D(o, b_1, b_2, d, c_1)$. Очевидно, что элемент множества $N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$ либо принадлежит $D(c_1, o, b_1, e, c_2)$, либо принадлежит $D(c_1, c_2, e, b_2, d)$. В первом случае a_1–a_{10} принадлежат $D(c_1, o, b_1, e, c_2)$, иначе $\{c_2\}$ — разделяющая клика G Но тогда $\{d\}$ — разделяющая клика G. Во втором случае элемент множества $N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$ принадлежит $D(c_1, c_2, e, b_2, d)$, иначе $\{c_2\}$ — разделяющая клика G. Но тогда $\{o\}$ — разделяющая клика G. Случай, когда вершины c_2 и e лежат вне $D(o, b_1, b_2, d, c_1)$ рассматривается аналогично.

По аналогии с рассуждениями из предыдущего абзаца можно показать, что c_1 и b_2 не могут одновременно иметь степень 3, если $eb_1 \in E, ed \in E$.

Если $eb_2 \in E, ed \in E$, то подграф $H_1 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e\}]$ с H_1-отделителем (b_1, o, c_2) является (3,III)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением e, b_2, d из G.

Всюду далее мы будем предполагать, что ни один элемент множества $N(c_2)\backslash\{c_1\}$ не смежен с двумя элементами множества $\{b_1, b_2, d\}$. Рассмотрим два случая, когда $N(e) \cap \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$ и когда $N(e) \cap \{b_1, b_2\} = \emptyset$.

а). Предположим, что $N(e) \cap \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$. Возможный сосед e' вершины c_2, отличный от c_1 и e, равноправен с вершиной e. В частности, e' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин b_1, b_2, a_1, a_2, a_3. Соображения симметрии приводят к заключению о том, что возможны только такие варианты: i). существует вершина из $N(c_2) \setminus \{c_1\}$, которая смежна хотя бы с одной из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$, или $deg(c_2) = 2$ и существует сосед e, смежный хотя бы с одной из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$, ii). $deg(c_2)$=2 и ни e, ни один сосед вершины e не смежен ни с одной из вершин a_1–a_{10}, iii). $N(c_2) = \{e, e', c_1\}$ и $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}, N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$. Отдельно рассмотрим каждый из них.

i). Предположим, что существует вершина из $N(c_2)\backslash\{c_1\}$, которая смежна хотя бы с одной из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$, или $deg(c_2) = 2$ и существует сосед e, смежный хотя бы с одной из вершин $a_1, \ldots, a_{10}$. Тогда существует порождённый цикл C_1' графа G, содержащий рёбра $a_1 o, oc_1, c_1 c_2$. Цикл (o, b_1, b_2, d, c_1) обозначим через C_3'. Через C_2' обозначим цикл (o, c_1, c_2, e, b_1) (если $eb_1 \in E$) или цикл $(o, c_1, c_2, e, b_2, b_1)$ (если $eb_2 \in E, eb_1 \notin E$). Для рёбер $c_2 c_1, c_1 o, ob_1$ и циклов C_1', C_2', C_3' выполнены все условия леммы 5. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G. Тогда $D(C_3') \subset D(C_2')$ или $D(C_1') \subset D(C_2')$ по лемме 5.

i.1). Предположим, что $eb_1 \in E$. Нетрудно видеть, что в любой плоской укладке графа G в каждом из случаев $D(C_3') \subset D(C_2')$ и $D(C_1') \subset D(C_2')$ вершины a_1–a_{10} и b_2, d лежат по разные стороны от C_2'. Ребро цикла C_1', инцидентное c_2 или e и отличное от ec_2 и $c_2 c_1$, лежит по одну сторону от C_2' вместе с вершинами a_1–a_{10}. Если существует вершина $b_2' \in N(b_2) \setminus \{b_1, d\}$, то $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_2', c_1, c_2]$. Поэтому $deg(d) = 3$ по лемме 4, т.к. (o, b_1, b_2, d, c_1) — порождённый 5-цикл графа G. Существует порождённый путь $(e, v_1, \ldots, v_k, d)$ графа G, иначе $\{d\}$ — разделяющая клика G. Каждая из вершин a_1–a_{10} и любая вершина этого пути лежат по разные стороны от C_2'. Поэтому $k = 1$, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, d, v_k, b_1, e]$. Тогда подграф $H_2 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, v_1\}]$ с H_2-отделителем (o, c_2, v_1) является (3,II)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_1, b_2, d из G.

i.2). Предположим, что $eb_2 \in E$. По случаям 1–11, либо $ea_1 \in E$, либо $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$. Рассмотрим вариант, когда d лежит внутри $D(C_2')$, т.е. когда $D(C_3') \subset D(C_2')$. Другой вариант рассматривается аналогично. Ввиду наличия цикла C_1', вершины a_1–a_{10} не принадлежат области $D(C_2')$. Поэтому возможный элемент e' множества $N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$ не принадлежит области $D(C_2')$, т.к. $N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} \neq \emptyset$. Возможный элемент множества $N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$ не принадлежит $D(C_3')$ (т.е. принадлежит $D(C_2') \setminus D(C_3')$), иначе либо $\{d\}$ — разделяющая клика G, либо в $D(C_3')$ лежит вершина $b_1' \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$. В последнем случае либо $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_1', e, c_2]$ (если $ea_1 \in E$), либо $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e, b_1, b_1']$ (если $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$). Тем самым, если $ea_1 \in E$, то $deg(d) = 2$, иначе $\{d\}$ — разделяющая клика G. В случае, когда $ea_1 \in E$, вершины b_1, c_2 имеют степень 3, иначе подграф $G[\{o, a_1, c_1, c_2, e, b_1, b_2, d\}]$ является 2-сжимаемым. Тогда хотя бы один из двух элементов множества $(N(b_1) \cup N(c_2)) \setminus \{o, b_2, c_1, e\}$ принадлежит области $D(o, c_1, c_2, e, a_1)$ и поэтому либо $\{c_2\}$, либо $\{b_1\}$ является разделяющей кликой G.

Далее мы будем рассматривать только случай, когда $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$. Хотя бы одна из вершин d и e имеет степень, равную 3, иначе $(G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e\}], \{o, b_1, c_2\})$ является вырожденной.

Рассмотрим два случая, когда $deg(c_2) = 2$ и когда $deg(c_2) = 3$.

i.2.1). Предположим, что $deg(c_2) = 2$. Понятно, что $deg(d) = 2$, иначе $(N(d) \cup N(e)) \setminus \{c_1, c_2, b_2\}$ имеет два элемента, оба принадлежащих множеству $D(C_2') \setminus D(C_3')$, поскольку $\{d\}$ не является разделяющей кликой G. Тогда $(G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e\}], \{o, b_1, e\})$ является вырожденной.

i.2.2). Предположим, что существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{e, c_1\}$. Тогда $e' \notin D(C_2')$. Существует вершина $x \in N(e) \setminus \{b_2, c_2\}$, иначе либо d образует разделяющую клику G, либо $(G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e\}], \{o, b_1, c_2\})$ является вырожденной.

Вершина x не может быть смежна с вершиной b_1, иначе $deg(d) = 2$ и подграф $H_3 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x\}]$ с H_3-отделителем (o, c_2, x) является (3,II)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_1, b_2, d из G.

Случай, когда $N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}$ будет разобран в пункте «a.iii». Поэтому мы будем считать, что e' имеет соседа среди вершин a_1, a_2, a_3. Тогда определены числа $i' = \max\{i \in \overline{1,3}|\ a_i e' \in E\}$ и $i'' = \min\{i \in \overline{1,3}|\ a_i e' \in E\}$. Если $e' = x$ и $i' = 1$, то $deg(b) = 2$ (иначе $\{b\}$ — разделяющая клика G) и подграф $G[\{o, a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d, x\}]$ является 2-сжимаемым. Если $e' = x$ и $i' > 1$, то $[a_{i'}, a_{i'+1}, a_{i'+2}, a_{i'+3}, a_{i'-1}, a_{i'-2}, a_{i'-3}, x, e]$, где $a_0 = o$ и $a_{-1} = b_1$.

Предположим, что $e' \neq x, e'b_1 \notin E$. Тогда $i' \neq i''$ по случаям 1–11. Тогда $[c_2, c_1, o, b_1, e', a_{i'}, a_{i'+1}, e, x]$ (если $a_{i'+1}x \notin E$), или $[e, c_2, e', a_{i''}, x, a_{i'+1}, a_{i'+2}, b_2, b_1]$ (если $a_{i'+1}x \in E, a_{i'+2}x \notin E$), или $[e, c_2, e', a_{i''}, x, a_{i'+2}, a_{i'+3}, b_2, b_1]$ (если $a_{i'+1}x \in E, a_{i'+2}x \in E$).

Предположим теперь, что $e' \neq x, e'b_1 \in E$. Тогда $i' \in \{1, 2\}$ по случаям 1–11. В случае, когда $i' = 2$, то либо $[b_1, e', a_2, a_3, b_2, e, x, o, c_1]$ (если $a_3x \notin E$), либо $[e, c_2, e', a_2, x, a_3, a_4, b_2, d]$ (если $a_3x \in E$ и поэтому $x \notin D(C_2')$, $a_4x \notin E$), либо $[e, c_2, e', a_2, x, a_4, a_5, b_2, d]$ (если $a_3x \in E$ и $a_4x \in E$). Если $i' = 1$, то $deg(b) = deg(e) = 3$, иначе подграф $G[\{o, a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, e', x\}]$ является 2-сжимаемым. Следовательно, $x \in D(C_2') \setminus D(C_3')$ и поэтому $\{e', a_1\}$ — разделяющая клика G.

ii). Предположим, что $deg(c_2)$=2 и что ни e, ни один сосед вершины e не смежен ни с одной из вершин a_1–a_{10}.

ii.1). Предположим, что $eb_1 \in E$. Тогда (o, c_1, c_2, e, b_1) — порождённый 5-цикл графа G. Поэтому, по лемме 4 имеется вершина $x \in N(e) \setminus \{c_2, b_2\}$, причём она не смежна ни с одной из вершин a_1–a_{10}. Вершины x и d должны быть смежными, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, e, x, c_1, d]$. Вершины x и b_2 не смежны, иначе $\{o\}$ — разделяющая клика графа G. Тогда подграф

$H_4 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x\}]$ с H_4-отделителем (o, b_2, x) является (3,II)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, e из G.

ii.2). Предположим, что $eb_2 \in E$. Тогда (c_1, c_2, e, b_2, d) — порождённый 5-цикл графа G. По лемме 4 обязаны существовать вершины $x \in N(e) \setminus \{c_2, b_2\}$ и $y \in N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$.

ii.2.1). Предположим, что $x = y$. Вершины x и b_1 не смежны, иначе $\{o\}$ — разделяющая клика G. Тогда подграф $H_5 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x\}]$ с H_5-отделителем (x, o, b_1) является (3,VII)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, e из G.

ii.2.2). Предположим, что $x \neq y$.

ii.2.2.1). Предположим, что $N(y) \cap \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$. Обозначим через C_1'' цикл (o, c_1, d, y, a_1) (если $a_1 y \in E$) или цикл (o, c_1, d, y, a_2, a_1) (если $a_2 y \in E, a_1 y \notin E$). Цикл (o, b_1, b_2, d, c_1) обозначим через C_2''. Цикл (c_1, c_2, e, b_2, d) обозначим через C_3''. Для рёбер $c_1 o, dc_1, b_2 d$ и циклов C_1'', C_2'', C_3'' выполнены все условия леммы 5. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G. Тогда $D(C_3'') \subset D(C_2'')$ или $D(C_1'') \subset D(C_2'')$ по лемме 5. Рассмотрим вариант, когда $D(C_3'') \subset D(C_2'')$, второй вариант рассматривается аналогично. Тогда вершины c_2, e, x принадлежат области $D(o, c_1, d, b_2, b_1)$, а вершины a_1–a_{10} и y не принадлежат ей. Существует вершина $b_1' \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$, принадлежащая данной области, иначе $\{e\}$ — разделяющая клика графа G. Но тогда $[d, b_2, b_1, b_1', y, a_i, a_{i+1}, c_1, c_2]$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$.

ii.2.2.2). Предположим, что $ya_1 \notin E, ya_2 \notin E$. Если $xy \notin E$, то $[c_1, o, a_1, a_2, c_2, e, x, d, y]$. Если $xy \in E$, то подграф $H_6 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d, x, y\}]$ с H_6-отделителем (o, b_1, x, y) является (4,II)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, b_2, d, e из G.

iii). Предположим, что $N(c_2) = \{e, e', c_1\}$ и что $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}, N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$. Будем считать, что $ee' \notin E$, иначе подграф $G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, e'\}]$ является 2-сжимаемым. Заметим, что в любой плоской укладке графа G вершины d и e лежат по разные стороны от цикла $(o, b_1, b_2, e', c_2, c_1)$. Отсюда нетрудно вывести, что $deg(d) = 2$ или $deg(e) = 2$, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, e', c_1, d, d']$ или $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, e, e'', c_1, d]$, где $d' \in N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$ и $e'' \in N(e) \setminus \{b_1, c_2\}$. Из соображений симметрии можно считать, что $deg(e) = 3$ и $deg(d) = 2$. Тогда подграф $H_7 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, e'\}]$ с H_7-отделителем (o, e, e') является (3,II)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин b_2, d, c_1.

b). Предположим, что $N(e) \cap \{b_1, b_2\} = \emptyset$. По случаям 1–11 вершина e смежна с двумя вершинами из $\{a_1, a_2, a_3\}$. Степень вершины c_2 равна 2, иначе возможный элемент множества $N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$ равноправен с вершиной e и имеет ровно двух соседей во множестве $\{a_1, a_2, a_3\}$. Рассмотрим все три возможных варианта на значение $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3\}$.

b.1). Если $ea_1 \in E, ea_2 \in E$, то $(G[\{o, a_1, a_2, c_1, c_2, e\}], \{a_2, o, c_1\})$ является вырожденной.

b.2). Предположим, что $ea_2 \in E, ea_3 \in E$. Отдельно рассмотрим два варианта: $deg(a_1) = 2$ и $deg(a_1) = 3$.

b.2.1). Предположим, что $deg(a_1) = 2$. Тогда подграф $H_8 = G[\{o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e\}]$ с H_8-отделителем (a_3, o, c_1) является (3,VI)-сжимаемым. Результат сжатия является минором графа G, т.к. он получается стягиванием рёбер $a_2a_1, a_1o, c_2e, c_1c_2$. Следовательно, результат сжатия принадлежит классу $\mathcal{P}(3)$. Понятно, что результат сжатия не содержит порождённого триода $T_{3,3,2}$.

b.2.2). Предположим, что существует вершина $a'_1 \in N(a_1)\setminus\{a_2, o\}$. Тогда $N(a'_1) \cap \{b_2, d\} \neq \emptyset$, иначе $[c_1, c_2, e, a_3, o, a_1, a'_1, d, b_2]$. Рассмотрим все три возможных варианта:

b.2.2.1). Если $a'_1b_2 \in E, a'_1d \in E$, то подграф $G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, a'_1\}]$ является 2-сжимаемым.

b.2.2.2). Если $a'_1b_2 \in E, a'_1d \notin E$, то подграф $H_9 = G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, a'_1\}]$ с H_9-отделителем (a_3, a'_1, b_1, d) является (4,III)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, e из G.

b.2.2.3). Если $a'_1d \in E, a'_1b_2 \notin E$, то $(G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, a'_1\}], \{a_3, a'_1, b_1, b_2\})$ является вырожденной. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, e из G.

b.3). Предположим, что $ea_1 \in E, ea_3 \in E$. Если $deg(a_2) = 2$, то подграф $H_{10} = G[\{o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e\}]$ с H_{10}-отделителем (a_3, o, c_1) является (3,VI)-сжимаемым. Результат сжатия является минором графа G, т.к. он получается стягиванием рёбер $a_2a_1, a_1o, c_2e, c_1c_2$. Следовательно, результат сжатия принадлежит классу $\mathcal{P}(3)$. Понятно, что результат сжатия не содержит порождённого триода $T_{3,3,2}$.

Если существует вершина $a'_2 \in N(a_2) \setminus \{a_3, a_1\}$, то a'_2 смежна с некоторой вершиной a_i, где $i \in \overline{4,6}$, иначе $[a_3, a_4, a_5, a_6, e, c_2, c_1, a_2, a'_2]$. Вершина a'_2 смежна с одной из вершин b_1 и b_2, иначе $[a_1, a_2, a'_2, a_i, o, b_1, b_2, e, c_2]$. Если $a'_2b_1 \in E$, то $[a'_2, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, b_1, b_2, d, a_2, a_1]$. Если $a'_2b_2 \in E$, то $[a'_2, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, b_2, d, c_1, a_2, a_1]$. $\square$

Лемма 11. *Вершина d не может быть смежна с одной из вершин a_1, a_2, a_3 или быть одновременно смежна с вершинами b_1 и c_1.*

Доказательство. Предположим противное. Предположим, что d смежна с b_1. По лемме 9 вершина d должна быть смежна с одной из вершин c_1, a_1, a_2, a_3. Если $da_i \in E$ для некоторого $i \in \overline{1,3}$, то $[a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i-1}, a_{i-2}, a_{i-3}, d, b_2]$, где $a_0 = o, a_{-1} = c_1, a_{-2} = c_2$. Предположим, что $dc_1 \in E$ и $db_1 \in E$. Тогда существует вершина $b'_2 \in N(b_2) \setminus \{b_1, d\}$, иначе $\{b_1, d\}$ — разделяющая клика графа G. Если $b'_2c_2 \in E$, то подграф $H_1 = G[\{o, c_1, c_2, b_1, b_2, d, b'_2\}]$ с H_1-отделителем (b'_2, c_2, o) является (3,III)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_1, b_2, d из G. Если $b'_2c_2 \notin E$, то b'_2 и d равноправны с точки зрения рассуждений, причём $b'_2b_1 \notin E$. Поэтому всюду далее мы будем считать, что $db_1 \notin E$. По лемме 10 всюду далее мы можем считать, что d имеет соседа среди вершин a_1, a_2, a_3. Пусть $i' = \max\{i|\ a_id \in E, i \in \overline{1,3}\}$.

a). Предположим, что существует вершина $e \in N(c_2) \setminus \{c_1\}$, не смежная с b_2. Тогда e и d симметричны с точки зрения рассуждений и поэтому мы можем считать, что $ec_1 \notin E$ и что e имеет соседа $a_{i''}$, где $i'' = \max\{i|\ a_ie \in E, i \in \overline{1,3}\}$. Из соображений симметрии мы можем считать, что $i' \geq i''$. Понятно, что $i'' \in \{1, 2\}$.

a.1). Рассмотрим случай, когда $i'' = 1$. Если $ea_4 \in E$, то $[a_4, a_5, a_6, a_7, e, c_2, c_1, a_3, a_2]$. Предположим, что $ea_4 \notin E$. Тогда $eb_1 \in E$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_2, e, c_2]$. Если $deg(c_2) = 2$, то $(G[\{o, a_1, b_1, c_1, c_2, e\}], \{a_1, b_1, c_1\})$ является вырожденной. Если же существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{e, c_1\}$, то e' смежна с одной из вершин b_2, a_2, a_3, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e', b_1, b_2]$ или $N(e') \cap \{c_1, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3\} = \{c_1\}$. Последнее невозможно по лемме 9 и т.к. вершины d и e' являются равноправными. Тогда подграф $G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, e'\}]$ содержит $K_{3,3}$ в качестве минора, для этого надо стянуть ребро c_1c_2, а также стянуть подграф $G[\{a_2, a_3, b_2, d, e'\}]$ в вершину. Следовательно, граф G не является планарным по критерию Вагнера.

a.2). Рассмотрим случай, когда $i'' = 2$. Тогда $i' = 3$. Если $da_i \in E$, где $i \in \overline{5,8}$, то $[d, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_3, a_2, a_1, b_2, b_1]$. Если $ea_4 \in E$, то $[a_4, a_3, d, b_2, e, c_2, c_1, a_5, a_6]$, а если $ea_5 \in E$, то $[a_5, a_6, a_7, a_8, e, c_2, c_1, a_4, a_3]$. Поэтому обязательно $da_4 \in E$, иначе $[a_3, a_2, e, c_2, d, b_2, b_1, a_4, a_5]$. Рассмотрим два варианта, когда $ea_1 \in E$ и когда $ea_1 \notin E$.

a.2.1). Предположим, что $ea_1 \notin E, ea_4 \notin E, ea_5 \notin E$. Тогда $eb_1 \in E$, иначе $[a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, o, b_1, e, c_2]$. Если существует вершина $x_1 \in (N(c_1) \cup N(c_2)) \setminus \{o, c_1, c_2, e\}$, то $x_1b_2 \notin E$, иначе подграф $G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x_1\}]$ содержит $K_{3,3}$ в качестве минора. Тогда обязательно $x_1a_1 \in E$, иначе либо $[b_1, o, c_1, x_1, b_2, d, a_4, e, a_2]$ (если $x_1c_1 \in E$), либо $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, x_1, b_1, b_2]$ (если $x_1c_2 \in E, x_1c_1 \notin E$). Тогда либо $[a_2, a_1, x_1, c_1, e, b_1, b_2, a_3, a_4]$ (если $x_1c_1 \in E$), либо $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_2, x_1, c_2]$ (если $x_1c_2 \in E$). Поэтому $deg(c_1) = deg(c_2) = 2$ и имеет место противоречие с леммой 4, т.к. (o, c_1, c_2, e, b_1) — порождённый 5-цикл графа G.

a.2.2). Предположим, что $ea_1 \in E$. Если $deg(c_2) = 2$, то $(G[\{o, a_1, a_2, c_1, c_2, e\}], \{a_2, o, c_1\})$ является вырожденной. Предположим, что существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$. Тогда либо $e'b_2 \in E$, либо $e'b_1 \in E, e'c_1 \in E$ по леммам 9 и 10. Во втором случае подграф $G[\{o, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, c_1, c_2, e, e', d\}]$ является 2-сжимаемым. Предположим, что $e'b_2 \in E$. Можно считать, что $e'b_1 \notin E$, иначе подграф $G[\{o, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, c_1, c_2, e, e', d\}]$ является 2-сжимаемым. Если $e'a_5 \notin E$, то $[b_2, d, a_4, a_5, e', c_2, e, b_1, o]$, а если $e'a_5 \in E$, то $[a_5, a_4, a_3, a_2, a_6, a_7, a_8, e', b_2]$.

b). Предположим, что существует вершина $e \in N(c_2) \setminus \{c_1\}$, смежная с b_2. Если существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$, то вершины d и e' равноправны. Поэтому $e'c_1 \in E, e'b_1 \in E$ по леммам 9 и 10 и предыдущим рассуждениям из пункта «a». Следовательно, подграф $H_2 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, e'\}]$ с H_2-отделителем (e, b_2, o) является (3,III)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, e' из G. Поэтому всюду далее мы будем считать, что $deg(c_2) = 2$. Вершина e не может быть смежна с вершиной a_i, где $i \in \overline{3,7}$, иначе $[a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, e, c_2, c_1, a_{i-1}, a_{i-2}]$. Далее мы будем считать, что $eb_1 \notin E$, иначе $(G[\{o, c_1, c_2, b_1, b_2, e\}], \{b_1, o, c_1\})$ является вырожденной.

Рассмотрим все три возможных варианта на значение параметра i'.

b.1). Предположим, что $i' = 1$. Тогда $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, c_1, c_2, d, b_2]$ (если

$a_4d \notin E$) или $[a_4, a_5, a_6, a_7, d, b_2, b_1, a_3, a_2]$ (если $a_4d \in E$).

b.2). Предположим, что $i' = 3$. Если $da_1 \in E$, то $[d, a_3, a_4, a_5, a_1, o, c_1, b_2, e]$. Если $da_2 \in E, ea_1 \notin E$, то $[b_2, b_1, o, a_1, d, a_3, a_4, e, c_2]$. Если $da_2 \in E, ea_1 \in E$, то $(G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d\}], \{b_1, c_1, a_3\})$ является вырожденной. Если $da_2 \notin E, da_1 \notin E, ea_1 \notin E$, то $[b_2, b_1, o, a_1, d, a_3, a_4, e, c_2]$ (если $a_4d \notin E$) или $[b_2, b_1, o, a_1, d, a_4, a_5, e, c_2]$ (если $a_4d \in E$). Если $da_2 \notin E, da_1 \notin E, ea_1 \in E$, то (a_1, o, c_1, c_2, e) — порождённый 5-цикл графа G. Поэтому по лемме 4 вершина c_1 имеет соседа $v \notin \{o, c_2\}$. Ввиду планарности графа G, $va_2 \notin E$ и $va_4 \notin E$, иначе G содержит $K_{3,3}$ в качестве минора. Тогда либо $[e, c_2, c_1, v, a_1, a_2, a_3, b_2, b_1]$ (если $vb_1 \notin E$), либо $[b_2, b_1, v, c_1, d, a_3, a_4, e, a_1]$ (если $vb_1 \in E, da_4 \notin E$), либо $[b_2, b_1, v, c_1, d, a_4, a_5, e, a_1]$ (если $vb_1 \in E, da_4 \in E$).

b.3). Предположим, что $i' = 2$. Если $ea_1 \notin E, a_4d \notin E$, то $[a_2, a_1, o, c_1, d, b_2, e, a_3, a_4]$. Если $ea_1 \notin E, a_4d \in E$, то $[d, a_2, a_1, o, a_4, a_5, a_6, b_2, e]$. Если $ea_1 \in E$, то (a_1, o, c_1, c_2, e) — порождённый 5-цикл графа G. Поэтому по лемме 4 вершина c_1 имеет соседа $u \notin \{o, c_2\}$. Ввиду планарности графа G, $ua_3 \notin E$ и $ua_4 \notin E$. Тогда либо $[e, c_2, c_1, u, a_1, a_2, a_3, b_2, b_1]$ (если $ub_1 \notin E$), либо $[b_2, b_1, u, c_1, d, a_3, a_4, e, a_1]$ (если $ub_1 \in E, da_4 \notin E$), либо $[b_2, b_1, u, c_1, d, a_4, a_5, e, a_1]$ (если $ub_1 \in E, da_4 \in E$).

Рассмотрим теперь случай, когда $da_1 \in E$. Если $deg(b_1) = deg(c_1) = 2$, то подграф $H_3 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e\}]$ с H_3-отделителем (e, b_2, o) является (3,III)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G. Тем самым, либо $N(b_1) \setminus \{o, b_2\} \neq \emptyset$, либо $deg(b_2) = 2, N(c_1) \setminus \{o, c_2\} \neq \emptyset$. Отдельно рассмотрим каждый из этих случаев.

b.3.1). Предположим, что существует вершина $x_2 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$. Если $x_2c_1 \notin E, x_2e \notin E$, то либо $[b_2, e, c_2, c_1, d, a_2, a_3, b_1, x_2]$ (если $x_2a_3 \notin E$), либо $[b_2, b_1, x_2, a_3, e, c_2, c_1, d, a_1]$ (если $x_2a_3 \in E$). Если $x_2c_1 \in E$ и $deg(x_2) = 2$, то подграф $H_4 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_2\}]$ с H_4-отделителем (o, b_2, e) является (3,VII)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_1 и x_2 из G.

Предположим, что $x_2c_1 \in E$ и существует вершина $y \in N(x_2) \setminus \{b_1, c_1\}$. Тогда $y \neq a_3, ya_3 \notin E$, иначе граф $G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d, x_2, y\}]$ содержит $K_{3,3}$ в качестве минора. Вместе с тем, $y \neq e$, иначе подграф $G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_2\}]$ является 2-сжимаемым. Вершина y должна быть смежна с e, иначе $[b_2, b_1, x_2, y, d, a_2, a_3, e, c_2]$. Вершина y смежна с вершиной $z \in N(y) \setminus \{x_2, e\}$ по лемме 4, т.к. (c_1, c_2, e, y, x_2) — порождённый 5-цикл графа G. Тогда $[e, c_2, c_1, o, b_2, d, a_2, y, z]$.

Предположим, что $x_2e \in E$. Если $deg(x_2) = 2$, то подграф $H_5 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_2\}]$ с H_5-отделителем (o, b_2, c_1) является (3,I)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин b_1 и x_2 из графа G. Если существует вершина $y' \in N(x_2) \setminus \{b_1, e\}$, то $y' \neq a_3$ и $y'a_3 \notin E$, иначе G не является планарным. Тогда либо $[e, c_2, c_1, o, b_2, d, a_2, x_2, y']$ (если $y'c_1 \notin E$), либо $[o, b_1, b_2, e, a_1, a_2, a_3, c_1, y']$ (если $y'c_1 \in E$).

b.3.2). Предположим, что $deg(b_1) = 2$ и что существует вершина $x_3 \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$. Вершина x_3 смежна с одной из вершин e и a_3, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, e, c_1, x_3]$. Если $x_3e \in E$, то подграф $H_6 = G[\{o, b_1, b_2, c_1,$

$c_2, e, x_3\}]$ с H_6-отделителем (o, b_2, x_3) является (3,II)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G. Если $x_3a_3 \in E, x_3e \notin E$, то $[c_1, x_3, a_3, a_4, c_2, e, b_2, o, a_1]$ (если $x_3a_4 \notin E$) или $[c_1, x_3, a_4, a_5, c_2, e, b_2, o, a_1]$ (если $x_3a_4 \in E$). $\square$