2 августа 2017 г.

## 0.1

Докажем, что минимальное доказательство формулы для таблички, в которой $n$ строк и $ln$ столбцов ($l > 1$ - константа) имеет экспоненциальный от $n$ размер.

Напомним, что у нас есть горизонтальные запреты, каждый из которых говорит, что в двух клетках, находящихся в одной строке не могут стоять две единицы и вертикальные запреты, говорящие, что в столбцах должно быть хотя-бы по одной единице.

Пусть $\Theta$ - это множество формул, являющихся конъюнкцией произвольного подмножества вертикальных и горизонтальных запретов нашей таблички.

Выполняющим набором формулы из $\Theta$ будем называть произвольную подстановку нулей и единиц в переменные, такую, что формула возвращает 1. Высотой выполняющего набора будем называть число строк, в которых есть хотя-бы одна единица.

**Лемма 1** *Существуют $C_1$, $C_2$ и достаточно маленькие $\varepsilon$ и $\delta$ ($C_1$ и $C_2$ зависят от $\varepsilon$ и $\delta$) такие, что если у формулы, составленной из нескольких (горизонтальных и вертикальных) запретов, есть OBDD размера не больше $C_1 2^{C_2 n}$, а так же выполняющий набор высоты не более $(1-\varepsilon)n$, то у нее есть выполняющий набор высоты не более $\delta n$.*

**Доказательство:** Выберем достаточно маленькое $\varepsilon$. Будем считать, что мы выбрали $C_1$ и $C_2$, какими именно должны быть $C_1$ и $C_2$ станет ясно по ходу доказательства.

Рассмотрим выполняющий набор высоты не более $(1-\varepsilon)n$ и оставим в нем в любом столбце одну любую единицу, в случае, если есть ограничение, что в этом столбце должна быть хотя-бы одна единица, и ни одной единицы, если такого ограничения нет (остальные единицы заменим нулями). Ясно, что получится выполняющий набор $\pi$ не большей высоты.

Будем называть строки, в которых в этом выполняющем наборе нет единиц, свободными.

Зафиксируем тот порядок переменных, при котором наша формула имеет маленькую OBDD. Рассмотрим такой процесс: изначально все клетки таблицы белые; на каждом шаге будем красить очередную клетку в красный цвет (ту самую, переменная которой идет следующей в нашем порядке). Следующие 2 утвержднеия говорят о том, чего не может происходить в разные моменты этого процесса.

**Утверждение 2** *Не существует такого момента, при котором найдется $\Omega(n)$ свободных строк, в каждой из которых есть красная и белая клетки, соединенные запретом (т.е. такие, что в нашей формуле есть запрет, говорящий, что хотя-бы в одной из этих клеток стоит ноль).*

Другими словами, мы сейчас докажем, что если таких строк окажется больше $sn$, где $s$ - некоторая константа, то OBDD при данном порядке переменных достигает экспоненциального размера. Параметры экспоненты могут зависеть от $\varepsilon$ и $s$.

Таким образом, если нам потребуется, чтобы таких строк было не больше $sn$, то нам достаточно выбрать $C_1$ и $C_2$ меньше этих параметров.

**Доказательство:** Пусть такой момент все-же нашелся и $W$ - множество свободных строк большого размера, о которых говорится в утверждении. Пусть $W_1$ - произвольное подмножество $W$. Рассмотрим следующие подстановки нулей и единиц в, соответственно, красные и белые клетки, $\varphi_{W_1}$ и $\psi_{W_1}$: $\varphi_{W_1}$ на несвободных строках совпадает с ограничением $\pi$ на красные клетки несвободных строк, на свободных строках не из $W_1$, $\varphi_{W_1}$ всюду равно нулю, а на свободных строках из $W_1$, $\varphi_{W_1}$ равно нулю во всех клетках, кроме той красной клетки из выбранной нами пары из красной и белой клеток, которые соединены запретом; на этой красной клетке $\varphi_{W_1}$ равно единице.

$\psi_{W_1}$ на несвободных строках совпадает с ограничением $\pi$ на белые клетки несвободных строк; на свободных строках не из $W_1$ $\psi_{W_1}$ всюду равно нулю; на свободных строках из $W_1$, $\psi_{W_1}$ равно нулю во всех клетках кроме той самой выбранной нами белой клетки, соединенной запретом с красной клеткой; на ней $\psi_{W_1}$ равно единице.

Заметим, что при всех $W_1$, конкатенация $\varphi_{W_1}$ и $\psi_{W_1}$ дает выполняющий набор. Теперь рассмотрим два различных подмножества $W_1$ и $W_2$ множества $W$. Пусть строка $S \in W_1$ и $S \notin W_2$. Заметим, что конкатенация $\varphi_{W_1}$ и $\psi_{W_2}$ дает невыполняющий набор, поскольку содержит две единицы, соединенные запретом в $S$.

Пусть $T_{W_1}$ - вершина в нашей OBDD, в которую мы попадем, когда спустимся из корня, в соответствии с $\varphi_{W1}$, пройдя по всем красным вершинам.

Предположим, что при каких-то $W_1$ и $W_2$, $T_{W_1} = T_{W_2}$. Не умаляя общности, пусть существует строка из $W_1$, но не из $W_2$. Согласно нашим замечаниям, конкатенация $\varphi_{W_1}$ и $\psi_{W_2}$ дает невыполняющий набор, а конкатенация $\varphi_{W_2}$ и $\psi_{W_2}$ - выполняющий, поэтому, если мы спустимся из $T_{W_1}$ до конца, в соответствии с $\psi_{W_2}$, то мы, с одной стороны, попадем в 0-лист, а с другой стороны - в 1-лист; получили противоречие.

Итак, $T_{W_1} \neq T_{W_2}$ при $W_1 \neq W_2$. Таким образом, в нашей OBDD найдется хотя-бы $2^{|W|}$ различных вершин. Утверждение доказано. ■

Будем называть существенными те столбцы, про которые в нашей формуле есть вертикальный запрет. Занумеруем существенные столбцы в том порядке, в котором клетка на них, в которой в $\pi$ стоит единица, становится красной.

В произвольный момент нашего процесса, будем называть пройденными те существенные столбцы, для которых клетка в них, в которой в $\pi$ стоит единица, уже красная.

**Утверждение 3** *a) Не существует такого момента, подмножества $W$ пройденных к этому моменту существенных столбцов размера $\Omega(n)$ и инъекции $g$ из $W$ в множество свободных строк, что все клетки вида $(x, g(x))$ в этот момент белые. b) Не существует такого момента, подмножества $W$ не пройденных к этому моменту существенных столбцов размера $\Omega(n)$ и инъекции $g$ из $W$ в множество свободных строк, что все клетки вида $(x, g(x))$ в этот момент красные.*

Опять же, скажем, если в пункте (a) такие множество столбцов и инъекция найдутся, то мы докажем, что OBDD имеет экспоненциальный размер - ситуация такая же, как в случае утверждения 2.

Доказательство похоже на доказательство утверждения 2.

**Доказательство:** а) Пусть $f(x)$ - номер строки такой, что в клетке $(x, f(x))$ в $\pi$ стоит единица (x - существенный столбец). Предположим, что такие момент, $W$ и $g$ существуют. Для каждого подмножества $W_1 \subseteq W$ рассмотрим следующие подстановки нулей и единиц в, соответственно, красные и белые клетки, $\varphi_{W_1}$ $\psi_{W_1}$: в $\varphi_{W_1}$ на всех красных клетках стоят нули кроме множества красных клеток вида $(x, f(x))$, где $x$ - пройденный существенный столбец, не принадлежащий $W_1$; на последних $\varphi_{W_1}$ равно единице. В $\psi_{W_1}$ единицы стоят во всех белых клетках вида $(x, f(x))$, где $x$ - не пройденный существенный столбец, а так же, в клетках вида $(x, g(x))$, где $x \in W_1$; на остальных белых клетках $\psi_{W_1}$ равно нулю.

Заметим, что для любого $W_1 \subseteq W$, конкатенация $\varphi_{W_1}$ и $\psi_{W_1}$ дает выполняющий набор.

Рассмотрим теперь два различных подмножества $W_1$, $W_2 \subseteq W$. Пусть столбец $S \in W_1$ и $S \notin W_2$. Заметим, что конкатенация $\varphi_{W_1}$ и $\psi_{W_2}$ не является выполняющим набором, поскольку в столбце $S$ не будет единиц.

В остальном доказательство повторяет доказательство утверждения 2: всем множествам $W_1 \subseteq W$ соответствуют попарно-различные вершины OBDD, соответствующие подстановкам $\varphi_{W_1}$, а значит, OBDD имеет экспоненциальный размер.

b) Доказательство аналогично пункту a: пусть такие момент, w и g существуют. Пусть $W_1$ - произвольное подмножество $W$. Пусть $\varphi_{W_1}$ - подстановка нулей и единиц в красные клетки, равная единице в клетках вида $(x,f(x))$, где x - пройденный существенный столбец, а так же в клетках вида $(x,\ g(x))$, где $x \in W_1$; в остальных красных клетках $\varphi_{W_1}$ равно нулю. Пусть $\psi_{W_1}$ - подстановка нулей и единиц в белые клетки, равная единице во всех клетках вида $(x, f(x))$, где $x$ - не пройденный существенный столбец, не принадлежащий $W_1$. Остаток доказательства повторяет доказательство пункта a. Утверждение доказано. ■

Продолжим доказательство леммы. Выберем достаточно маленькие $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, такие, что $2\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$

Выберем произвольные $[\varepsilon_2 n]$ свободных строк. Рассмотрим последовательность комбинаторных прямоугольников $M_i$, где $M_i$ образован выбранными $[\varepsilon_2 n]$ свободными строками (пусть они образуют множество $S$) и существенными столбцами с номерами $[(i-1)\varepsilon_1 n]+1$, $[(i-1)\varepsilon_1 n]+2$, ... $[i\varepsilon_1 n]$. (Напомним, что столбцы нумеруются в том порядке, в котором они пройдены).

Пусть $m_i$ - момент, когда пройдены первые $i$ этих прямоугольников.

Пусть $A_i$ - множество строк $S$, в которых в момент $m_i$ есть красная и белая клетки, соединенные горизонтальным запретом. Заметим, что мы можем выбрать $C_1$ и $C_2$ из формулировки леммы так, чтобы $\alpha_i = |A_i|/n$ было сколь угодно маленьким (меньшим некоторого $\alpha$), всилу утверждения 2.

Пусть $b_i$ - множество белых клеток в первых i прямоугольниках из $\{M_k\}$ в момент $m_i$. Всилу утверждения 2a, в $b_i$ нельзя выбрать $\Omega(n)$ клеток, таких, что все содержащие их строки и столбцы различны. По теореме Кёнига, которая утверждает, что в двудольном графе размер максимального паросочетания равен размеру минимального вершинного покрытия, найдутся множества $B_{i.1}$ строк и $B_{i.2}$ столбцов, которые вместе покрывают $b_i$ и такие, что $|B_{i.1}| + |B_{i.2}| \leq \beta n$, где $\beta$ - достаточно маленькое число.

Пусть $C_i$ - множество красных клеток в прямоугольниках с номерами больше $i$ в момент $m_i$. Аналогично, всилу теоремы Кёнига, и утверждения 3b, найдутся множества $C_{i.1}$ строк и $C_{i.2}$ столбцов, которые вместе покрывают $C_i$ и такие, что $|C_{i.1}| + |C_{i.2}| \leq \gamma n$, где $\gamma$ - достаточно маленькое число.

Рассмотрим прямоугольник $M_i$. Выкинем из него все строки из $A_{i-1}$, все строки из $C_{i-1.1}$, все столбцы из $C_{i-1.2}$, все строки из $B_{i.1}$ и все столбцы из $B_{i.2}$. Всего, таким образом, выкинуто не более $\alpha + \beta + \gamma$ строк и не более $\beta + \gamma$ столбцов. Получился, очевидно, снова комбинаторный прямоугольник. Назовем его $M_i'$. Заметим, что мы можем сделать величину $(\alpha+\beta+\gamma)/\varepsilon_1$ сколь угодно малой. То есть, можно считать, что из $M_i$ удаляется небольшая доля строк и столбцов. Поскольку $2\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, мы можем выбрать в каждом столбце $M_i'$ по клетке так, чтобы они были из разных строк. Сделаем это. Пусть $R$ - множество выбранных клеток.

Покажем теперь, что никакие две выбранные клетки не соединены горизонтальным запретом. Рассмотрим две выбранные клетки $x$, $y$ из одной и той же строки $t$, из прямоугольников $M_i'$ и $M_j'$, $i < j$. Рассмотрим момент $M_{i-1}$. $x \notin b_i \Rightarrow x$ - красный. $y \notin b_{i-1} \Rightarrow y$ - белый. $t \notin A_{j-1}$ (поскольку $y$ выбран) $\Rightarrow x$ и $y$ не могут быть соединены запретом.

Итак, если мы поставим единицы во всех выбранных клетках, не выполненной останется часть вертикальных ограничений, не превосходящая $(\alpha + \beta + \gamma)/\varepsilon_1$ (такую часть столбцов из $M_i$ мы выкидываем). Но поскольку эта величина достаточно маленькая, эти ограничения можно выполнить, поставив в соответствующих столбцах единицы на пересечении со свободными строками не из $S$ (таких строк хотя-бы $(\varepsilon - \varepsilon_2)n$), не более одной на каждой строке. (И после этого в каждом существенном столбце будет ровно по одной единице) Таким образом, всего будет занято не более $\varepsilon_2 n + ((\alpha + \beta + \gamma)/\varepsilon_1)ln$ строк. Величину $\varepsilon_2 + ((\alpha + \beta + \gamma)/\varepsilon_1)l$ мы можем сделать сколь угодно малой, выбрав надлежащим образом $C_1$ и $C_2$. Лемма доказана.

∎

Назовем формулу из $\Theta$ сильной, если у нее нет выполняющего набора высоты менее $(1 - \varepsilon)n$ и слабой, если такой набор есть (и, тем самым, есть выполняющий набор высоты менее $\delta n$, если у нее маленькая OBDD)

Предположим, что у формулы, в которую включены все запреты, есть маленькое доказательство. Это означает, что в какой-то момент мы вывели тождественную ложь из $\Theta$. Эта формула из $\Theta$, разумеется, является сильной, поскольку у нее вообще нет выполняющих наборов.

Рассмотрим две формулы, из которых она получилась операцией AND. Если одна из них сильная, то рассмотрим две формулы, из которых она получилась операцией AND (не обращаем внимания на reordering), и так далее. Когда-нибудь мы обнаружим сильную формулу, которая получилась с помощью конъюнкции двух слабых формул.

Таким образом, для наших целей достаточно доказать, что если фиксирован некий порядок переменных и конъюнкция двух слабых формул $\varphi_1$ и $\varphi_2$ дает сильную формулу, то одна из этих формул дает экспоненциальную OBDD.

Предположим противное: у $\varphi_1$ и $\varphi_2$ маленькие OBDD. Будем говорить, что некоторая величина равна $A(n)$, если существует достаточно маленькая (выбираемая нами) константа $\alpha$ такая, что величина не превосходит $\alpha n$ (точнее, мы можем выбрать параметры экспоненты так, чтобы она не превосходила $\alpha n$ (поскольку если она будет превосходить, то размер доказательства будет превосходить экспоненту с данными параметрами)). Зафиксируем выполняющие наборы для $\varphi_1$ и $\varphi_2$ высоты не более $\delta n$ и рассмотрим таблицу $T$, полученную из исходной таблицы выкидыванием всех строк (их не более $2\delta n = A(n)$), в которых есть единица в наших выполняющих наборах и всех несущественных для $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ столбцов. Рассмотрим, опять же, процесс покраски нашей таблицы в красный цвет (изначально все клетки белые) в соответствии с порядком переменых.

**Лемма 4** *Существуют достаточно маленькие $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ такие, что в любой момент существуют лишь $A(n)$ существенных для формулы $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ столбцов $T$, содержа-*

*щих более $\varepsilon_1 n$, но менее $(1-\varepsilon_2)n$ красных клеток (будем называть такие столбцы плохими).*

Заметим, что для сильной формулы хотя-бы $n - A(n)$ столбцов существенны.
**Доказательство:** Заметим, что в любой момент множество плохих столбцов является объединением плохих столбцов, существенных для $\varphi_1$ и плохих столбцов, существенных для $\varphi_2$. Поэтому, достаточно доказать, что существует лишь $A(n)$ плохих столбцов, существенных для, скажем, $\varphi_1$. Для этого заметим, что к $\varphi_1$ применимы утверждения 3a и 3b из первой леммы: в любой момент множества белых клеток на пройденных столбцах и красных клеток на непройденых (в терминологии леммы 1) столбцах не содержат в себе больших "паросочетаний"и поэтому, всилу теоремы Кёнига, могут быть покрыты $A(n)$ строками и $A(n)$ столбцами каждое. Остается заметить, что каждый из столбцов, отличный от столбцов покрытия, не является плохим. Лемма доказана. ■

Пусть столбец таблицы $T$ имеет длину $n_1 = n - A(n)$. Пусть лемма 4 выполняется с достаточно маленькими $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \alpha$. Будем говорить, что столбец $T$ находится в состоянии 1, если менее $\alpha n_1$ его клеток красные, в состоянии 2, если число его красных клеток не менее $\alpha n_1$, но не более $(1-\alpha)n_1$, и в состоянии 3, если это число превышает $(1-\alpha)n_1$.

Изначально все столбцы в состоянии 1, и каждый из них постепенно переходит в состояние 2, а затем в состояние 3. При этом, по лемме 2, существует достаточно маленькое $\beta$, что в любой момент лишь не более $\beta n$ столбцов пребывают в состоянии 2.

Построим граф $G$, вершинами которого будут столбцы $T$, в котором 2 столбца смежны, если не существует такого момента, в который один из них (любой) пребывает в состоянии 3, а второй - в состоянии 1.

**Лемма 5** *Лишь $A(n)$ вершин $G$ имеют степень, превосходящую $A(n)$ (здесь правильнее сказать превосходящую $\alpha n$ для достаточно маленького $\alpha$)*

Другими словами, большинство вершин $G$ имеют маленькую степень.
**Доказательство:** Пронумеруем столбцы $T$ в том порядке, в котором они переходят в состояние 2. Выберем константу $\gamma < 1$, достаточно маленькую, но, тем не менее, гораздо большую $\beta$. Рассмотрим последовательность моментов $\{m_i\}$, где $m_i$ - момент, когда ровно $[\gamma n i]$ столбцов перешли в состояние хотя-бы 2 (любой из таких моментов).

Пусть $B_i$ - множество столбцов в состоянии 2 в момент $m_i$, а $C_i = \{[\gamma n(i-1)]+1, [\gamma n(i-1)]+2, ...[\gamma n i]\}$ (мы интерпретируем $C_i$ как множество столбцов). Рассмотрим произвольный элемент $C_i \setminus B_i$. В момент $m_{i-1}$ он в состоянии 1, поэтому не может быть смежен со столбцами с номерами 1, 2, ..., $\gamma n(i-1)$ помимо $B_{i-1}$. В момент $m_i$ он в состоянии 3, поэтому не может быть смежен со столбцами с номерами, большими $\gamma n i$. Таким образом, он может быть смежен лишь со столбцами из $B_{i-1} \cup C_i$, но $|B_{i-1} \cup C_i| \le (\beta + \gamma)n = A(n)$. Остается заметить, что $|\cup_i C_i \setminus B_i| \ge \frac{\gamma - \beta}{\gamma} n_2 = n_2 - A(n_2) = n_2 - A(n)$, где $n_2$ - число столбцов таблицы $T$. Лемма доказана. ■

Будем говорить, что 2 клетки, находящиеся в одной строке $T$ смежны, если они соединены запретом в $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. Выберем произвольную строку и $\lceil 2l \rceil$ ее попарно несмежных клеток, если такая строка и $\lceil 2l \rceil$ клеток есть. Выкинем эту строку и $\lceil 2l \rceil$ соответствующих столбцов из таблицы. С полученной таблицей сделаем то же самое: возьмем строку, $\lceil 2l \rceil$ попарно несмежных клеток на ней и выкинем строку и соответствующие столбцы. И так далее. В конце останется некоторая табличка $T'$ для которой в любой строке среди любых $\lceil 2l \rceil$ клеток найдутся 2 смежные.

**Лемма 6** *$T'$ содержит $a = \Omega(n)$ строк и $b = \Omega(n)$ столбцов. (хотя-бы $Cn$, где $C$ - константа, зависящая только от $l$)*

**Доказательство:** Пусть мы выкинули $t$ строк и, соответственно, $\lceil 2l \rceil t$ столбцов. Таким образом, $a = n_1 - t$, $b = n_2 - \lceil 2l \rceil t$. Заметим, что если $t + b < n_1 - \varepsilon n$, то у $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ найдется выполняющий набор высоты менее $n_1 - \varepsilon n < n - \varepsilon n$. В самом деле, чтобы построить такой набор, достаточно поставить единички во все множества из $\lceil 2l \rceil$ попарно несмежных клеток, в соответствии с которыми мы выкидывали строки и столбцы из таблицы (так мы заполним все выкинутые столбцы), а в каждом столбце $T'$ поставим единичку в произвольную строку $T'$, лишь бы для разных столбцов эти строки были различны (в остальные клетки поставим нули).

Итак, $t + n_2 - \lceil 2l \rceil t = t + b \geq n_1 - \varepsilon n$

Имеем:

$$n_2 - (\lceil 2l \rceil - 1)t \geq n_1 - \varepsilon n$$

$$t \leq \frac{n_2 - n_1 + \varepsilon n}{\lceil 2l \rceil - 1}$$

$$a = n_1 - t \geq n_1 - \frac{n_2 - n_1 + \varepsilon n}{\lceil 2l \rceil - 1} =$$

$$= n_1 - \frac{n_2}{\lceil 2l \rceil - 1} = \frac{n_1 - \varepsilon n}{\lceil 2l \rceil - 1} >$$

$$> n_1 - \frac{n_2}{\lceil 2l \rceil - 1} > n_1 - \frac{ln}{\lceil 2l \rceil - 1} = \Omega(n)$$

Неравенство $t + b \geq n_1 - \varepsilon n$ равносильно неравенству $b \geq a - \varepsilon n$. Из последнего, при достаточно маленьком $\varepsilon$, следует, что $b = \Omega(n)$. Лемма доказана. ∎

Выкинем из $T'$ ту небольшую часть строк (менее $A(n)$), вершина которых имеет большую степень (более $A(n)$) (в соответствии с леммой 5). Среди оставшихся столбцов $T'$ выберем произвольный столбец, выделим его, выкинем из таблицы все столбцы, с которыми он смежен (их немного), среди оставшихся столбцов выберем любой, выделим его, выкинем из таблицы все столбцы, с которыми он смежен, и так далее, пока не наберется $\lceil 2l \rceil$ выделенных столбцов (разумеется, константы должны быть выбраны так, чтобы столбцы не закончились до этого момента).

Итак, выбрано $\lceil 2l \rceil$ попарно несмежных столбцов. Известно, что в каждой строке таблички $T'$ какие-то 2 клетки из выделенных столбцов смежны. Таким образом, каждую строку $T'$ можно отнести к одному из $\lceil 2l \rceil(\lceil 2l \rceil - 1)/2$ типов в зависимости от того, пересечения ее с какими двумя выделенными столбцами смежны. Значит, строк какого-то типа будет хотя-бы $a/(\lceil 2l \rceil(\lceil 2l \rceil - 1)/2) = \Omega(a) = \Omega(n)$. Тем самым, мы получили 2 выделенных (а значит, не смежных) столбца, пересечения которых с $\Omega(n)$ строками смежны друг с другом (пусть эти строки образуют множество $S$).

Поскольку столбцы не смежны, найдется момент, когда почти все клетки одного столбца - белые и почти все клетки другого столбца - красные. Это значит, что мы можем выкинуть лишь $A(n)$ строк из $S$ так, чтобы в оставшихся $\Omega(n)$ строках нашлись белая и красная клетки, соединенные запретом (а именно - пересечения этих строк с двумя нашими столбцами). Не умаляя общности, пусть хотя-бы в половине из этих строк соответствующие клетки соединены запретом, пришедшем из $\varphi_1$. Вспомним, что мы фиксировали выполняющий набор для $\varphi_1$ высоты не более $\delta n$, который остался за пределами $T$. Таким образом, мы оказались в такой же ситуации, какая описана в утверждении 2 леммы 1. Поэтому OBDD для $\varphi_1$ имеет экспоненциальный размер. Теорема доказана