ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФАСЕТНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФА

П.В. Червонных

В данной статье описан класс опорных неравенств, которые порождают фасеты многогранника задачи аппроксимации графа.

Ключевые слова: M-граф, многогранник, опорное неравенство, фасета.

Введение

Пусть $K_n = (V, E)$ – полный неориентированный n-вершинный граф без петель и кратных рёбер. Остовный подграф $H \subset K_n$ называется M-графом, если каждая его компонента связности (возможно одновершинная) является кликой. Множество всех M-графов в K_n обозначим через $\mathcal{H}$. Пусть $G \subset K_n$ – некоторый априори заданный остовный подграф. Задача аппроксимаци графа заключается в нахождении графа $H \subset \mathcal{H}$, минимизирующего функционал

$$\rho_G(H) = |EG \cup EH| - |EG \cap EH| \tag{1}$$

на множестве $\mathcal{H}$.

В общем случае эта задача NP-трудна [1]. Для неё известны некоторые полиномиально разрешимые случаи [2], построены оценки целевой функции [3] и разработаны приближённые алгоритмы [4].

В настоящей работе мы исследуем многогранник задачи аппроксимации графа. В разделе 1 приведены основные понятия, факты и обозначения. Разделы 2, 3 посвящёны изучению неравенств, индуцированных графами специального вида. В разделе 2 доказана их опорность к многограннику M-графов. В разделе 3 доказывается фасетность этих неравенств.

1. Основные понятия и факты

Для любого графа $D \subset K_n$, через VD и ED будем обозначать множества его вершин и рёбер соответственно. Для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv, где u, v – вершины из V, инцидентные ребру e. Множество рёбер, инцидентных вершине u будем обозначать как $\delta(u)$. Каждое множество $R \subset E$ индуцирует некоторый подграф T, в котором $ET = R$ и VT – множество вершин из V, инцидентных рёбрам из R. Граф, индуцированный множеством рёбер R, иногда будем обозначать через R. Для подграфов D, F из K_n положим

$$D \cup F = (VD \cup VF, ED \cup EF), D \cap F = ED \cap EF$$

и если $F \subseteq D$, то $D \backslash F = (VD, ED \backslash EF)$. Кликой в K_n называется подграф, вершины которого попарно смежны. Одновершинный граф также является кликой.

С графом K_n свяжем евклидово пространство R^E размерности $\frac{n^2-n}{2}$, поставив в соответствие каждому ребру ось координат в R^E. Это пространство может рассматриваться как множество вектор-столбцов, компоненты которых индексируются элементами из E. Если $x \in R^E$ и $R \subset E$, то через $x(R)$ обозначим линейную форму $\sum\limits_{e \in R} x_e$. Вектором инциденций произвольного подграфа $D \subset K_n$ называется вектор $x^D \in R^E$ с компонентами $x^D_e = 1$ при $e \in ED$ и $x^D_e = 0$ при $e \notin ED$.

Множество $P \subset R^E$ называется многогранником, если P является выпуклой оболочкой конечного числа точек. Под размерностью (dim P) многогранника P будем понимать уменьшенную на 1 мощность максимального по включению аффинно независимого семейства его точек. Если dim $P = |E|$, то будем называть P многогранником полной размерности.

Линейное неравенство $a^t x \leq a_0$ $(a, x \in R^E,\ a \neq 0,\ a_0 \in R)$ называется правильным относительно многогранника P, если $a^t x \leq a_0$ для любого $x \in P$. Правильное неравенство $a^t x \leq a_0$ называется опорным к P, если существуют $x', x'' \in P$ такие, что $a^t x' = a_0$ и $a^t x'' < a_0$. Всякое опорное к P неравенство порождает множество $\{x \in P | a^t x = a_0\}$, которое называется гранью многогранника P. Грани размерности 0 будем называть вершинами, а грани размерности (dim $P - 1$) – фасетами многогранника P. Неравенство, порождающее фасету многогранника P, называется фасетным относительно этого многогранника.

Многогранником M-графов или, что то же, многогранником задачи аппроксимации графа называется множество

$$P_{\mathcal{H}} = conv\{x^H \in R^E | H \in \mathcal{H}\}.$$

Нас будет интересовать полиэдральный подход к решению задачи аппроксимации графа. Выбор данного подхода неслучаен. Комбинаторные методы решения экстремальных комбинаторных задач, как правило, эффективны на задачах относительно небольшой размерности. С другой стороны, поскольку экстремальные комбинаторные задачи чаще всего NP-трудны, рост размерности задач делает комбинаторные методы практически неприменимыми (по времени) при большой длине входа. В таких ситуациях полиэдральные методы ведут себя гораздо эффективнее. Наиболее впечатляющие рекорды при точном решении индивидуальных экстремальных комбинаторных задач получены именно с применением полиэдральных постановок (см., например, [5, 6, 7]). Основная идея полиэдрального подхода заключается в использовании так называемых отсекающих гиперплоскостей. Именно фасетные неравенства принято ситать наиболее эффективными в алгоритмическом плане отсекающими плоскостями.

Теоретических результатов сравнительного характера в пользу использования фасетных неравенств в алгоритмах на сегодняшний день не существует. Тем не менее помимо алгоритмической эффективности фасетные неравенства актуальны в следующем смысле. Всякое линейное описание многогранника M-графов в виде полиэдра в обязательном порядке содержит все его фасеты. Более того, фасетных неравенств достаточно для полного описания многогранника. Это приводит к идее сведения экстремальной комбинаторной задачи к задаче линейного программирования как таковой. Кроме того, одним из эмпирических аргументов в пользу фасетных неравенств является то, что фасетные неравенства наиболее тонко учитывают комбинаторную структуру семейства $\mathcal{H}$ и, как следствие, структуру многогранника $P_{\mathcal{H}}$.

В настоящее время известен лишь один класс фасетных неравенств относительно многогранника $P_{\mathcal{H}}$, индуцированный графом специального вида [8].

В данной работе был описан ещё один класс опорных неравенств, порождающих фасету многогранника M-графов.

2. Класс правильных неравенств

Будем рассматривать множество E ребер графа K_n в качестве основного множества. В качестве семейства подмножеств $\mathcal{H} \subseteq 2^E$ возьмем семейство всех M-графов в графе K_n. Пусть $W = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ упорядоченное подмножество множества V, p – нечётно. Через F обозначим звезду в K_n с центром в вершине $u \notin W$ и лучами uv_j, а через C – цикл с множеством вершин W и множеством рёбер $\{v_1v_2, ..., v_{p-1}v_p, v_pv_1\}$. С графом $F \cup C$

свяжем линейное неравенство:

$$x(EF) - x(EC) \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$$

или, что то же,

$$(x^F - x^C)^t x \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \tag{2}$$

Лемма 1. *Неравенство (2) является опорным относительно $P_{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Пусть множество $EF \cap EH = \{uv | v \in U\}$, $U \subseteq W$, тогда $|EF \cap EH| = |U| = s$. Если $v_i, v_{i+1} \in U$, то $v_i v_{i+1} \in EC \cap EH$ (вершины из W индексируются по модулю p). Следовательно, множество $EC \cap EH$ будет являться набором цепей. При этом между двумя соседними цепями есть, по крайней мере, одна вершина, не лежащая в U. Обозначим эти цепи $P_1, P_2, ..., P_t$, причем $|VP_i| \geq 1$, $i = 1, 2, ..., t$. В связи с этим $s = \sum_{i=1}^{t} s_i$, где s_i - количество вершин в цепи P_i. Пусть $v(P_i) \in V \setminus U$ - вершина, непосредственно следующая за последней вершиной цепи P_i в цикле C. Тогда множество $VP_i \cup \{v(P_i)\}$ назовём блоком, $i = 1, 2, ..., t$. Нетрудно заметить, что $|VP_i \cup \{v(P_i)\}| \geq 2$.

Найдем верхнюю оценку числа t. Очевидно, что максимально возможное количество цепей будет при условии минимальности длин этих цепей. Соответственно, это будут цепи длины 0, т.е. цепи, состоящие из 1 вершины. Так как p - нечётно и в данном случае $|VP_i \cup \{v(P_i)\}| = 2$, то количество одновершинных цепей будет не больше, чем количество всех вершин в W, без учёта вершины, не вошедшей в блок, уменьшенное в 2 раза. Иначе говоря, $t \leq \frac{p-1}{2} = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

Легко заметить, что $x^H(EC) = |EC \cap EH| = \sum_{i=1}^{t} |P_i| = \sum_{i=1}^{t} (s_i - 1) = \sum_{i=1}^{t} s_i - t = s - t$, где $|P_i|$ - длина цепи P_i, $i = 1, 2, ..., t$. Следовательно, $x^H(EF) - x^H(EC) = |EH \cap EF| - |EH \cap EC| = s - s + t = t \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$. Правильность неравенства (2) относительно $P_{\mathcal{H}}$ доказана.

Опорность этого неравенства к многограннику $P_{\mathcal{H}}$ следует из того, что вектор инциденций, например, клики на вершинах $\{u, v_1, v_3, v_5, ..., v_{p-2}\}$ обращает его в равенство.

Лемма доказана.

3. Фасетность

В работе [9] представлена техника доказательства фасетности опорного неравенства. Применительно к многограннику полной размерности эта техника имеет следующий вид.

Пусть $b^t x \leq b_0$ опорное к $P_{\mathcal{H}}$ неравенство.

Определение 1. Непустое множество $S \subset E$ будем называть $b\mathcal{H}$-переключением, если существуют такие $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, что

1) $S = H_1 \Delta H_2$,

2) $b^t x^{H_1} = b^t x^{H_2} = b_0$,
где $H_1 \Delta H_2 = (H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_1)$ – симметрическая разность множеств H_1 и H_2.

Определение 2. Элемент $e_0 \in E$ называется $b\mathcal{H}$-базисом, если выполняются следующие условия:

(i) $b_{e_0} \neq 0$,

(ii) для всякого $e \in E \setminus \{e_0\}$ существует такая упорядоченная последовательность $e_1, e_2, ..., e_t = e$ элементов из E, что при любом $i \in \{1, 2, ..., t\}$ элемент e_i принадлежит некоторому $b\mathcal{H}$-переключению, лежащему в $\{e_0, e_1, e_2, ..., e_i\}$.

Теорема 1 [9]. *Для того, чтобы опорное к $P_{\mathcal{H}}$ неравенство $b^t x \le b_0$ было фасетным, достаточно существования $b\mathcal{H}$-базиса $e_0 \in E$.*

Следуя описанной технике доказательства фасетности опорного неравенства относительно многогранника $P_{\mathcal{H}}$, сформулируем утверждение.

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{H}$ семейство всех M-графов в графе K_n, $(x^F - x^C)^t x \le \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ – неравенство вида (2), индуцированное графом $F \cup C$. Следующие множества рёбер являются $(x^F - x^C)\mathcal{H}$-переключениями:*

a) *одноэлементные множества рёбер $\{st\}$, при $s, t \notin V(F \cup C)$;*

b) *множество вида $\{su, sv_i, sv_{i+2}, sv_{i+4}, ..., sv_{i+(p-3)}\}$, при $s \notin V(F \cup C\ )$, $i = 1, 2, ..., p$ (индексы берутся по модулю p);*

c) *хорды цикла C, т.е. множества рёбер вида $\{v_i v_j\}$, $2 \le |i - j| \le p - 2$;*

d) *множество вида $\{uv_i, v_i v_{i+1}, v_i v_{i+3}, ..., v_i v_{i+(p-2)}\}$, $i = 1, 2, ..., p$ (индексы берутся по модулю p);*

e) *одноэлементные множества рёбер $\{\ v_i s\ \}$, при $s \notin V(F \cup C)$, $i = 1, 2, ..., p$ (индексы берутся по модулю p).*

Доказательство. Случай a). Положим H_1 – клика на вершинах $\{u, v_1, v_3, ..., v_j, ..., v_{p-2}\}$, и $H_2 = H_1 \cup \{st\}$. Тогда $H_1 \Delta H_2 = \{st\}$ и $(x^F - x^C)^t x^{H_1} = (x^F - x^C)^t x^{H_2} = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

Случай b). H_1 – клика на вершинах $\{u, v_i, v_{i+2}, v_{i+4}, ..., v_{i+(p-3)}\}$ и H_2 – клика на вершинах $\{u, s, v_i, v_{i+2}, v_{i+4}, ..., v_{i+(p-3)}\}$, $i = 1, 2, ..., p$ (индексы берутся по модулю p).

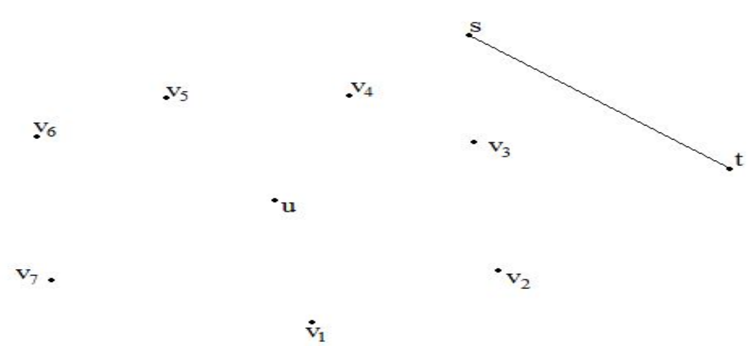
Случай c). Пусть имеется хорда $v_i v_j$, $2 \le |i - j| \le p - 2$. Будем полагать, что $i < j$. Кроме того, без ограничения общности положим $i = 1$. Построим клику H_1 следующим образом. Если $j = 1(mod 2)$, то H_1 – клика на множестве вершин $\{u, v_2, v_4, \ldots, v_{p-1}\}$. Ясно, что в этом случае вершина v_j не принадлежит VH_1. Если же $j = 0(mod 2)$, то H_1 – клика на множестве вершин $\{u, v_2, v_4, \ldots, v_{j-2}, v_{j+1}, \ldots, v_p\}$. Вновь $v_j \notin VH_1$. Пусть $H_2 = H_1 \cup \{v_1 v_j\}$. Ясно, что H_1 и H_2 – M-графы, требуемые определением 1.

Случай d). H_1 – клика на вершинах $\{u, v_i, v_{i+1}, ..., v_{i+(p-2)}\}$, $i = 1, 2, ..., p$ (индексы берутся по модулю p) и $H_2 = H_1 \cup \{uv_i, v_i v_{i+1}, v_i v_{i+3}, ..., v_i v_{i+(p-2)}\}$, и $(x^F - x^C)^t x^{H_1} = (x^F - x^C)^t x^{H_2} = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

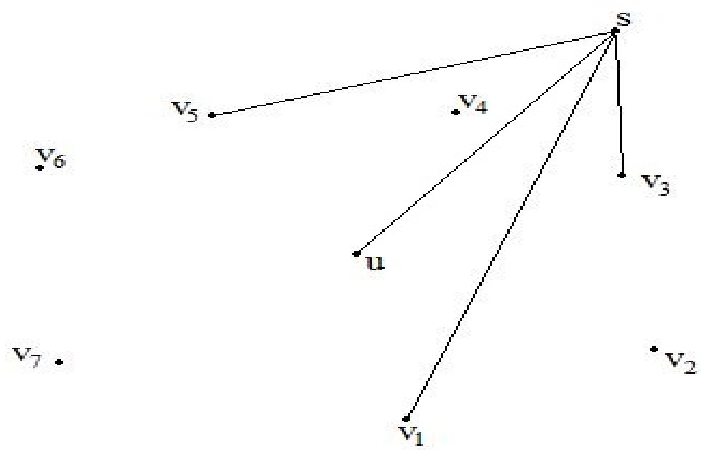
Случай e). H_1 – клика на вершинах $\{u, v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i+5}, ..., v_{i+(p-2)}\}$, $i = 1, 2, ..., p$ (индексы берутся по модулю p) и $H_2 = H_1 \cup \{v_i s\}$.

Утверждение доказано.

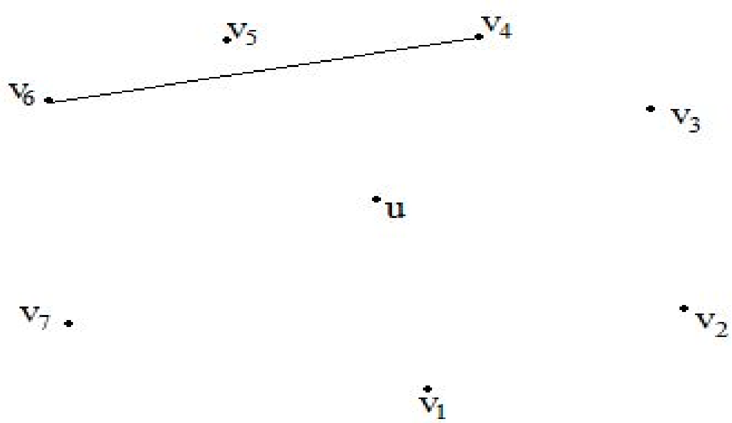
Пример. В качестве иллюстрации к доказательству утверждения 1 рассмотрим граф $F \cup C$ с p = 7. Тогда: $(x^F - x^C)\mathcal{H}$-переключение вида a):



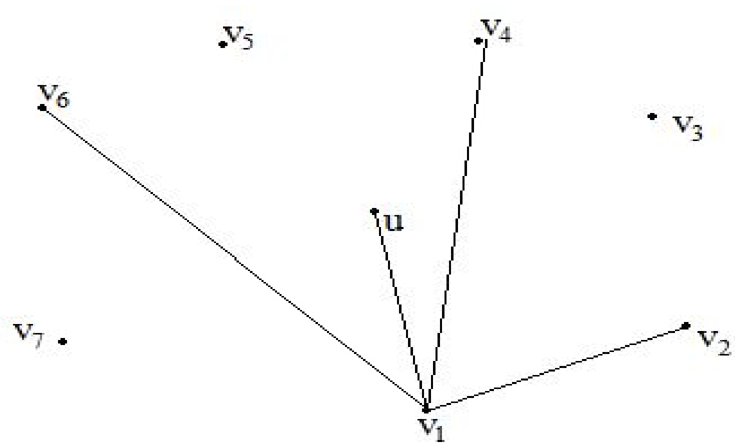
$(x^F - x^C)\mathcal{H}$-переключение вида b):



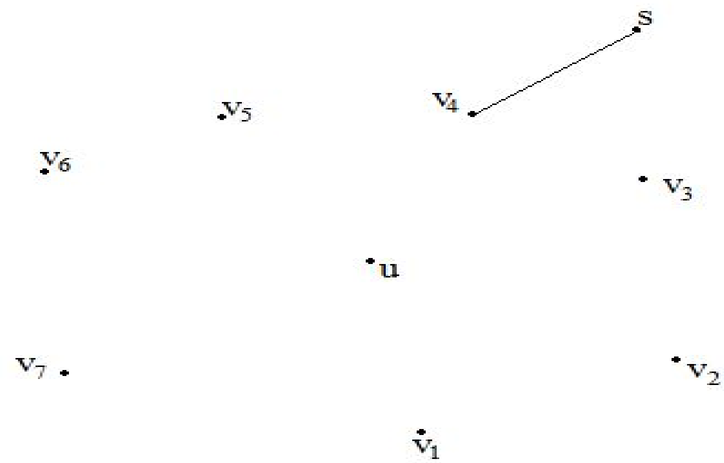
$(x^F - x^C)\mathcal{H}$-переключение вида c):



$(x^F - x^C)\mathcal{H}$-переключение вида d):



$(x^F - x^C)\mathcal{H}$-переключение вида e):



Теорема 2. *Неравенство* $(x^F - x^C)x \le \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ *порождает фасету многогранника* M*-графов.*

Доказательство. Используя обозначения из формулировки утверждения 1, покажем, что $(x^F - x^C)\mathcal{H}$-базисом может являться любой луч uv звезды F. Зафиксируем луч uv_1. Условие (i) выполняется. Для проверки условия (ii) мы будем осуществлять переходы

$$\{uv_1\} \to \{uv_1\} \cup E_1 \to \{uv_1\} \cup E_1 \cup E_2 \to \ldots \to \{uv_1\} \cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots E_t = E$$

так, что на каждом переходе s каждое ребро $e \in E_s$ получается из $\{uv_1\} \cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots E_{s-1}$ за один шаг с помощью $(x^F - x^C)\mathcal{H}$-переключений из утверждения 1. Эти переходы изобразим в виде таблицы, в левой колонке которой указано очередное множество E_s, а в правой – $(x^F - x^C)\mathcal{H}$-переключения, которому ребра этого множества принадлежат (отметим, что в этой таблице важен порядок строк):

$$E_1 = \{st \mid s, t \notin V(F \cup C)\} \quad - \quad \{st\} \text{ (утв. 1 a)};$$

$$E_2 = \{sv_i \mid s \notin V(F \cup C)\} \quad - \quad \{sv_i\} \text{ (утв. 1 e)};$$

$$E_3 = \{v_iv_j \mid 2 \le |i-j| \le p-2\} \quad - \quad \{v_iv_j\} \text{ (утв. 1 c)};$$

$$E_4 = \{su \mid s \notin V(F \cup C)\} \quad - \quad \{sv_1, sv_3, \ldots, sv_{p-2}, su\} \text{ (утв. 1 b)}.$$

Остается построить ребра множества $EF \cup EC$. Мы будем строить их в последовательности $v_1v_2, uv_2, v_2v_3, uv_3, \ldots, v_{p-1}v_p, uv_p, v_pv_1$, используя п. d) из утверждения 1. Первые четыре ребра в этой последовательности образуют множества E_5, E_6, E_7 и E_8:

$$E_5 = \{v_1v_2\} \quad - \quad \{uv_1, v_1v_2, v_1v_4, \ldots, v_1v_{p-2}\} \text{ (утв. 1 d)};$$

$$E_6 = \{uv_2\} \quad - \quad \{uv_2, v_1v_2, v_2v_{p-1}, v_2v_{p-3}, \ldots, v_2v_4\} \text{ (утв. 1 d)};$$

$$E_7 = \{v_2v_3\} \quad - \quad \{uv_2, v_2v_3, v_2v_5, \ldots, v_2v_{p-1}\} \text{ (утв 1 d)};$$

$$E_8 = \{uv_3\} \quad - \quad \{uv_3, v_2v_3, v_3v_p, v_3v_{p-2}, \ldots, v_3v_5\} \text{ (утв. 1 d)};$$

и так далее. Пары множеств E_5, E_6 и E_7, E_8 строятся с помощью одинакового приема, который применяется далее для построения всех ребер. Нетрудно заметить, что в итоге мы получим все ребра множества E.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] **Shamir R., Sharan R., Tsur D.** Cluster graph modification problems. Discrete Applied Mathematics. — 2004. V. 144, N 1-2. P. 173-182.

[2] **Фридман Г.Ш.** Одна задача аппроксимации графов// — Управляемые системы. — 1971. Вып.8, с. 73-75.

[3] **Ильев В.П., Фридман Г.Ш.** К задаче аппроксимации графами с фиксированным числом компонент// — Докл. АН СССР. — 1982. Т. 264, N 3, с. 533-538.

[4] **Ильев В.П., Ильева С.Д., Навроцкая А.А.** Приближенные алгоритмы для задач аппроксимации графов// — Дискрет. анализ и исследование операций. — 2011. Т. 18, N 1, с. 41-60.

[5] **Grotschel M., Holland O.** Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems// Math. Program., 1991. N 51. – P. 141-202.

[6] **Crowder H., Jonson E.L. and Padberg M.W.** Solving large-scale zero-one linear programming problems// Oper. Res., 1983. N 31. – P. 803-834.

[7] **Grotschel M., Padberg M.W.** Polyhedral computations// The Travelling Salesman Problem. Ed. by E.L. Lawler etc., 1985.

[8] **Симанчёв Р.Ю., Уразова И.В.** О гранях многогранника задачи аппроксимации графа// — Дискрет. анализ и исследование операций. — 2015. Т. 22,, N 2, с. 86-101.

[9] **Simanchev R.Yu., Urazova I.V.** On the Facets of Combinatorial Polytopes // — Kochetov, Yu. et all (eds.) DOOR-2016. LNCS, vol. 9869, pp. 233-243, Springer, Heidelberg (2016)