

“Простые” вопросы — пожалуйста, начните с них.

Объяснения к этим задачам спросят у Вас на устном собеседовании; достаточно написать ответ.

1. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\log_2 n}\right)^{\log_2 n}$ .
2. Пусть  $a_n$  — **ограниченная** последовательность вещественных чисел. Известно, что для каждого  $n \in \mathbb{N}$  выполняется  $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n}$ . Обязательно ли эта последовательность имеет предел? Если Вы считаете, что да, то напишите “ДА”. Если Вы считаете, что нет, то приведите пример.
3. Дайте определение непрерывной функции на языке  $\varepsilon, \delta$ .
4. Приведите пример непрерывной функции из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , которая во всех целых точках не имеет производной, а во всех остальных имеет. Если Вы считаете, что такой функции нет, то напишите это.
5. Дана система из 10 линейных уравнений с вещественными коэффициентами, в которой участвует 20 переменных. Какое количество решений (в вещественных числах) может быть у такой системы? Перечислите все возможные варианты.
6. Профессор нарисовал две квадратные матрицы 5 на 5:  $A$  и  $B$  и расставил 10 различных ненулевых чисел в 10 клетках первой матрицы и 10 различных ненулевых чисел в 10 клетках второй матрицы, остальные элементы матриц он оставил незаполненными. После этого студенты вписали недостающие элементы, но не сказали профессору какие, а профессор верно сказал, чему равен определитель произведения этих двух матриц. Приведите пример таких матриц и оставьте незаполненные клетки, чтобы можно было провести такой фокус.
7. Известно, что многочлен  $x^n + x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$  имеет своими корнями числа  $1, 2, 3, 4, \dots, n-1$ . Найдите  $a_0$ .
8. Есть 10 самоубийц. Каждый день каждый живой из них подбрасывает монетку и если выпадает орел, то стреляется. Чему равно математическое ожидание числа живых через 4 дня?
9. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры идут в возрастающем порядке?
10. Какие собственные числа (с учетом кратности) у матрицы  $n \times n$ , состоящей из одних единиц?
11. Объясните в одно предложение, почему существует такое вещественное число, для которого не существует программы, которая будет работать бесконечно долго и выписывать цифры его представления в десятичной системе счисления.
12. Приведите пример такой булевой функции  $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , что любая ее запись в ДНФ имеет конъюнкты длины  $n$ .
13. Вася побывал в опасном месте, где он мог с вероятностью 0.8 заболеть. Вася прошел обследование в двух клиниках, известно, что первая клиника выявляет заболевание (если оно есть) с вероятностью 0.5 (и не выявляет, если заболевания нет), а вторая клиника выявляет заболевание с вероятностью 0.75. Клиники работают независимо друг от друга. С какой вероятностью Вася заболел, если ни одна из клиник заболевание не обнаружила?
14. Запишите на любом языке программирования процедуру, которая сдвигает массив циклически на заданное число позиций. Параметрами процедуры являются массив (ячейки которого можно модифицировать), количество элементов  $N$  в нём и количество позиций  $K$ , на который надо сдвинуть. Предполагается, что будет выполнено  $O(N)$  операций и использовано  $O(1)$  ячеек памяти.

---

“Более сложные” задачи — пожалуйста, решайте их; рекомендуется решать именно в этом порядке.

Объяснения к этим задачам следует записать подробно.

15. В связном графе отметили  $2n$  вершин. Докажите, что их можно разбить на пары и соединить непересекающимися по ребрам путями.
16. Про последовательность  $T(n)$  известно  $T(n) = 3T(\lceil n/3 \rceil) + n$ . Оцените скорость роста  $T(n)$ .
17. Известно, что при всех натуральных  $k$  число  $99^{22k} + 100^{22k} - 2$  делится на некоторое общее для всех  $k$  простое число. На какое?
18. Вычислите  $\sum_{k=1}^7 \cos \frac{2\pi k}{7}$ .