Задания

20 марта 2016 г.

1. Опишите 2-сортную сигнатуру и теорию коммутативных колец с единицей и модулей над ними (определение этих понятий легко найти в интернете).

2. Докажите, что если принцип Лейбница заменить следующим принципом

$$\frac{z = y \qquad \varphi(y)}{\varphi(z)}$$

то множество теорем не изменится.

3. Рассмотрим сигнатуру $(\{N\}, \{0 : N, S : N \to N, + : N \times N \to N\})$. Рассмотрим следующую теорию:

$$0 + y = y$$
$$S(x) + y = S(x + y)$$

Докажите, что следующие формулы невыводимы в этой теории

- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $x + y = y + x$

Напомню, что для доказательства невыводимости формулы достаточно привести пример модели в которой эта формула не верна.

4. Рассмотрим сигнатуру $(\{D\}, \{* : D \times D \to D, 1 : D, f : D \to D, g : D \to D, i_1 : D \to D, i_2 : D \to D\})$. Рассмотрим следующую теорию в ней:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$
$$x * 1 = x$$
$$1 * x = x$$
$$f(f(x)) = f(x)$$
$$g(g(x)) = g(x)$$
$$f(g(x)) = g(f(x))$$
$$i_1(f(x)) * g(x) = 1$$
$$f(x) * i_2(g(x)) = 1$$

Какие из следующих утверждений являются теоремами этой теории? Докажите это.

(a) $i_1(x) = i_2(x)$

(b) $i_1(x) * x = 1$

(c) $f(x) = g(x)$

(d) $f(x) = x$

При доказательстве выводимости можно опускать очевидные шаги, такие как применения ассоциативности и аксиом $1 * x = x$ и $x * 1 = x$.

5. Рассмотрим сигнатуру $(\{D\}, \{* : D \times D \to D, + : D \times D \to D, 1 : D, 0 : D, - : D \to D\})$. Теория колец с единицей выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(x + y) + z &= x + (y + z) \\
x + 0 &= x \\
0 + x &= x \\
x + y &= y + x \\
x + -x &= 0 \\
(x * y) * z &= x * (y * z) \\
x * 1 &= x \\
1 * x &= x \\
x * (y + z) &= (x * y) + (x * z) \\
(y + z) * x &= (y * x) + (z * x)
\end{aligned}
$$

Добавим к этой теории следующую аксиому:

$$x * x = x$$

Докажите, что в этой расширенной теории выводимы следующие формулы:

(a) $x * y = y * x$

(b) $x + x = 0$