

Задания

22 марта 2016 г.

Множество типов лямбда исчисления:

$$\frac{}{P \in Type}, P \in Var \quad \frac{}{\perp \in Type} \quad \frac{\varphi \in Type \quad \psi \in Type}{\varphi \rightarrow \psi \in Type}$$

$$\frac{\varphi \in Type \quad \psi \in Type}{\varphi \times \psi \in Type} \quad \frac{\varphi \in Type \quad \psi \in Type}{\varphi \amalg \psi \in Type}$$

Множество предтермов лямбда исчисления (мы используем разные множества для переменных в типах и переменных в термах):

$$\frac{}{x \in Term}, x \in Var' \quad \frac{t \in Term}{absurd_{\varphi} t \in Term}, \varphi \in Type$$

$$\frac{t \in Term}{\lambda x. t \in Term}, x \in Var' \quad \frac{t \in Term \quad t' \in Term}{t t' \in Term}$$

$$\frac{a \in Term \quad b \in Term}{(a, b) \in Term} \quad \frac{t \in Term}{fst t \in Term} \quad \frac{t \in Term}{snd t \in Term}$$

$$\frac{t \in Term}{Left t \in Term} \quad \frac{t \in Term}{Right t \in Term}$$

$$\frac{e \in Term \quad a \in Term \quad b \in Term}{\mathbf{case} \, e \, \mathbf{of} \, \{ Left(x) \rightarrow a; Right(y) \rightarrow b \} \in Term}, x, y \in Var'$$

Правила типизации:

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \varphi}, (x : \varphi) \in \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash b : \perp}{\Gamma \vdash absurd_{\varphi} b : \varphi}$$

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash b : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x. b : \varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash f : \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash a : \varphi}{\Gamma \vdash f a : \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : \varphi \quad \Gamma \vdash b : \psi}{\Gamma \vdash (a, b) : \varphi \times \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash p : \varphi \times \psi}{\Gamma \vdash fst p : \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash p : \varphi \times \psi}{\Gamma \vdash snd p : \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : \varphi}{\Gamma \vdash Left a : \varphi \amalg \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash b : \psi}{\Gamma \vdash Right b : \varphi \amalg \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \varphi \text{ II } \psi \quad \Gamma, x : \varphi \vdash a : \chi \quad \Gamma, y : \psi \vdash b : \chi}{\Gamma \vdash \mathbf{case } e \mathbf{ of } \{ Left(x) \rightarrow a; Right(y) \rightarrow b \} : \chi}$$

А теперь задания:

1. Между правилами вывода логики и конструкциями в лямбда исчислении существует естественная биекция. Например, $\rightarrow I$ соответствует абстракции, а $\rightarrow E$ соответствует аппликации. Запишите эту биекцию для остальных правил и конструкций.
2. Приведите для следующих теорем дерева вывода и термы, доказывающие их:
 - (a) $P \rightarrow P$
 - (b) $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$
 - (c) $P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$
 - (d) $(P \vee Q) \wedge R \rightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
3. Приведите для следующих теорем доказывающие их термы:
 - (a) $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \vee Q) \wedge R$
 - (b) $(P \vee Q) \vee R \rightarrow P \vee (Q \vee R)$
 - (c) $((((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P) \rightarrow Q) \rightarrow Q$
4. Добавим в нашей логике новую связку \leftrightarrow , удовлетворяющую следующим условиям:

$$\top \leftrightarrow \top = \top$$

$$\top \leftrightarrow \perp = \perp$$

$$\perp \leftrightarrow \top = \perp$$

$$\perp \leftrightarrow \perp = \top$$

- (a) Опишите правила введения и элиминации для этой связки. Они не должны использовать никакие другие связки.
- (b) Опишите аналогичные конструкции и правила типизации для них в лямбда исчислении.
- (c) Приведите терм, доказывающий формулу $(P \vee Q \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$.