

Задания

29 февраля 2016 г.

Мы будем говорить, что два множества разрешимо равномощны, если у этих множеств есть аналоги в виде типов языка хаскелл, и между этими типами существуют взаимно обратные функции языка хаскелл. Аналогом множества \mathbb{N} является тип $\text{data Nat} = \text{Zero} \mid \text{Suc Nat}$. Аналогом множества $\{0, 1\}^*$ является тип $[\text{Bool}]$. Если X – подмножество $\{0, 1\}^*$, то его аналогом является тип $\text{type } X = [\text{Bool}]$, но предполагается, что в функции $X \rightarrow a$ не передаются аргументы, выходящие за пределы X , и функции $a \rightarrow X$ не возвращают результат, выходящий за его пределы.

1. Докажите, что \mathbb{N} и $\{0, 1\}^*$ разрешимо равномощны, где второе множество – это множество последовательностей из 0 и 1.
2. Докажите, что $\{0, 1\}^*$ и \mathbb{N}_2 разрешимо равномощны, где второе множество – это множество двоичных натуральных чисел, то есть последовательностей 0 и 1 без ведущих нулей (кроме случая, когда последовательность состоит из одной цифры).
3. Докажите, что $\{0, 1\}^*$ и множество корректных программ на каком-либо (любом) языке программирования разрешимо равномощны.
4. Определите множество простых чисел.
5. Определите следующие функции над \mathbb{Q} и докажите их корректность:
 - (a) Функция $\text{neg} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, возвращающая обратное по сложению число.
 - (b) Функция $\text{inv} : \mathbb{Q}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{Q}_{\neq 0}$, возвращающая обратное по умножению число.
 - (c) Функция $\text{plus} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, возвращающая сумму двух чисел.
6. Докажите, что существует биекция между двумя вариантами определения множества $\prod(a \in A)B_a$, приведенных в лекции.
7. Пусть $\text{Vec}(A, n)$ – множество списков длины n , элементы которых лежат в множестве A . В лекции был приведен пример функции index . Опишите аналогичным образом “тип” функций (то есть в каком множестве они лежат, все эти множества будут множествами зависимых

функций), приведенных ниже. Каждая из этих функций должна принимать и возвращать элементы множеств вида $Vec(A, n)$ и, возможно, другие аргументы.

- (a) Функция *reverse*, разворачивающая список.
- (b) Функция *append*, конкатенирующая два списка.
- (c) Функция *filter*, принимающая предикат и список длины n , и возвращающая

8. Задания на хаскелле:

- (a) См. cb.hs.
- (b) Пусть $\mathbb{N}_{\geq 2} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ и $m : \mathbb{N}_{\geq 2} \times \mathbb{N}_{\geq 2} \rightarrow \mathbb{N}$ возвращает произведение чисел, то есть $m(x, y) = x \cdot y$. На лекции мы видели, что существует отношение эквивалентности \sim на $\mathbb{N}_{\geq 2} \times \mathbb{N}_{\geq 2}$, такое что $(\mathbb{N}_{\geq 2} \times \mathbb{N}_{\geq 2})/\sim$ равномощно $im(m)$. Задайте тип на хаскелле, аналогичный $(\mathbb{N}_{\geq 2} \times \mathbb{N}_{\geq 2})/\sim$ (вам понадобится задать *instance Eq* для него). Определите биекцию на хаскелле между этим типом и $im(m)$.
- (c) Определите на хаскелле два варианта рациональных чисел: один через отношение эквивалентности, другой через канонические представители. Определите биекцию между ними.

9. Опциональная задача для любителей программирования с зависимыми типами. Реализуйте функции из задания 7 на агде.