Задания

9 марта 2016 г.

1. Напишите нерекурсивное определение функции

$$f(n) = \sum_{i<n} (f(i) + 1)$$

   Докажите, используя (обобщенный) принцип индукции, равенство этих двух функций.

2. Докажите, что принцип зависимой рекурсии эквивалентен принципам рекурсии и индукции. Hint: Чтобы доказать, что принцип индукции следует из принципа зависимой рекурсии, возьмите в качестве B следующую коллекцию: $B(n) = \{*\}$, если верно $P(n)$, иначе $B(n) = \varnothing$.

3. Приведите контрпримеры, показывающие, что отдельно ни принципа рекурсии, ни принципа индукции не достаточно, чтобы гарантировать уникальность натуральных чисел. То есть нужно привести примеры множеств $\mathbb{N}_i$ вместе с $0_i \in \mathbb{N}_i$, $S_i : \mathbb{N}_i \to \mathbb{N}_i$, где $i \in \{1, 2\}$, таких что $\mathbb{N}_1$ удовлетворяет принципу рекурсии, $\mathbb{N}_2$ удовлетворяет принципу индукции, но они не равномощны $\mathbb{N}$.

4. Пусть $\mathbb{N}'$ – некоторое множество вместе с $0' \in \mathbb{N}'$ и $S' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$. Тогда принцип PM для $\mathbb{N}'$ говорит, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$ если $S'^n(0') = S'^m(0')$, то $n = m$.

   - Докажите, что принцип рекурсии для $\mathbb{N}'$ эквивалентен PM.
   - Обратите внимание, что для доказательства этого факта нужно использовать принцип исключенного третьего. Укажите явно место, где оно необходимо.
   - Какое дополнительное предположение о $\mathbb{N}'$ нужно сделать, чтобы это доказательство работало без исключенного третьего?

5. Сформулируйте принципы рекурсии, индукции и зависимой рекурсии для множества $List(A)$.

6. Опишите индуктивным образом предикат на $\mathbb{N}$, задающий нечетные числа.