

Задания

16 ноября 2015 г.

1. Докажите, что функторы $\Sigma_A, \Pi_A : \mathbf{Set}/(\Gamma \times A) \rightarrow \mathbf{Set}/\Gamma$, определенные в лекции, являются соответственно левым и правым сопряженными к $A^* : \mathbf{Set}/\Gamma \rightarrow \mathbf{Set}/(\Gamma \times A)$.
2. Докажите, что функтор $\Sigma_A : \mathbf{C}/(\Gamma \times A) \rightarrow \mathbf{C}/\Gamma$, определенный в лекции, является левым сопряженным к $A^* : \mathbf{Set}/\Gamma \rightarrow \mathbf{Set}/(\Gamma \times A)$.
3. Докажите, что если (A, p_A) – объект \mathbf{C}/Γ , то категория \mathbf{C}/A изоморфна категории $\mathbf{C}/\Gamma/(A, p_A)$.
4. Докажите, что если \mathbf{C} – локально декартово замкнута и в ней существует терминальный объект, то она декартово замкнута.
5. Докажите, что категория \mathbf{C} – локально декартово замкнута тогда и только тогда, когда Π_A существует для любого A .
6. Докажите, что определение $\Pi_A : \mathbf{C}/A \rightarrow \mathbf{C}$ в декартово замкнутой категории с уравнителями, приведенное в лекции, обладает необходимым универсальным свойством.
7. Докажите, что если $p_B : B \rightarrow \Gamma \times A$ – мономорфизм, то $p_{\Pi_A(B)} : \Pi_A(B) \rightarrow \Gamma$ также является мономорфизмом.
8. Докажите, что если категория булевская, то она двухзначная.
9. Приведите 4 примера категорий предпучков, показывающих, что возможны все комбинации вариантов булевости/не булевости, двухзначности/не двухзначности категории.