

Задания

7 сентября 2015 г.

Если M – моноид, то мы будем обозначать \mathbf{C}_M категорию с одним объектом $*$ и множеством морфизмов $Hom_{\mathbf{C}_M}(*, *) = M$, операция композиции и тождественный морфизм в которой определяются как соответствующие операции в M .

Если (X, \leq) – предпорядок, то мы будем обозначать $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$ категорию с множеством объектов $Ob(\mathbf{C}) = X$ и множеством морфизмов $Hom_{\mathbf{C}_{(X, \leq)}}(x, y)$, состоящим из одного элемента, если $x \leq y$, и пустым в противном случае.

1. Изоморфны ли следующие объекты категории **Hask**? Если да, напишите функции, устанавливающие изоморфизм.
 - (a) *Bool* и *Maybe Bool*.
 - (b) *Either Bool Bool* и $(Bool, Bool)$.
 - (c) *Integer* и *Maybe Integer*.
 - (d) *Integer* и $[(\)]$.
2. Какие морфизмы являются изоморфизмами в следующих категориях?
 - (a) $\mathbf{C}_{(\mathbb{N}, +)}$.
 - (b) $\mathbf{C}_{(\mathbb{N}, *)}$.
 - (c) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z}, +)}$.
 - (d) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z}, *)}$.
 - (e) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q}, +)}$.
 - (f) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q}, *)}$.
3. Опишите следующие моноиды и группы:
 - (a) $Aut_{\mathbf{Set}}(A)$, где A – множество букв русского алфавита.
 - (b) $Aut_{\mathbf{Set}_{fin}}(A)$, где A – множество букв русского алфавита.
 - (c) $Endo_{\mathbf{C}_M}(*).$
 - (d) $Endo_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}).$
 - (e) $Aut_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}).$
 - (f) $Endo_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z})$, где **Ring** – категория колец с единицей.

- (g) $Aut_{\mathbf{C}}(X)$, где \mathbf{C} – скелетная категория, и X – произвольный объект \mathbf{C} .
- (h) $Endo_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n)$.
- (i) $Aut_{\mathbf{Num}}(n)$.
- (j) $Endo_{\mathbf{C}_{(X, \leq)}}(x)$, где x – произвольный элемент X .
4. Какие из следующих категорий являются скелетными: **Set**, **Set_{fin}**, **Grp**, **Vec**, **Hask**, **Mat**, **Num**?
5. Какие из следующих категорий являются группоидами: **Set**, **Set_{fin}**, **Grp**, **Vec**, **Hask**, **Mat**, **Num**?
6. Какие из следующих категорий могут быть скелетными и в каких случаях?
- (a) Дискретные категории.
- (b) Категории вида \mathbf{C}_M .
- (c) Категории предпорядка.
- (d) Группоиды.
7. Какие из следующих категорий могут быть группоидами и в каких случаях?
- (a) Дискретные категории.
- (b) Категории вида \mathbf{C}_M .
- (c) Категории предпорядка.
- (d) Скелетные категории.
8. Пусть $f, f' : X \rightarrow Y$ и $g, g' : Y \rightarrow X$ – морфизмы в некоторой категории \mathbf{C} . Докажите, что если диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & Y & \\
 f \nearrow & & \searrow g \\
 X & \xrightarrow{id_X} & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & X & \\
 g' \nearrow & & \searrow f' \\
 Y & \xrightarrow{id_Y} & Y
 \end{array}$$

коммутируют и $f = f'$, то X и Y изоморфны.

9. Приведите пример, показывающий, что условие $f = f'$ в предыдущем задании является необходимым.