Задания

2 ноября 2015 г.

1. Докажите, что если $\Gamma, x : A \vdash b : B$ и $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![b[x := a]]\!] = [\![b]\!] \circ \langle id_{[\![\Gamma]\!]}, [\![a]\!] \rangle$.

2. В этом задании нужно будет описать тип сумм.

   (a) Добавьте в λ исчисление тип сумм (как *Either* в хаскелле). Кроме самого типа нужно добавить конструкции *left*, *right* и *either*, а также правила редукции.

   (b) Опишите его интерпретацию в категориях с бинарными копроизведениями.

3. В утверждении о существовании F-алгебр требовалось, чтобы F сохранял копределы. Но в доказательстве использовался только тот факт, что он сохраняет копределы на диграммах вида $(\mathbb{N}, \leq)$. Чтобы доказать, что модель индуктивных типов данных существует в общем случае, нам нужно показать, что функтор $(-)^B$ сохраняет эти копределы. В общем случае это не так, но если B конечен в определенном смысле, то это верно в некоторых категориях.

   Упорядоченное множество $(D, \leq)$ называется *направленным*, если для любых $x, y \in D$ существует $z \in D$, такой что $x \leq z$ и $y \leq z$. Например, множество $(\mathbb{N}, \leq)$ являетсяс направленным. Копредел называется направленным, если он является копределом на направленном множестве. Объект B категории $\mathbf{C}$ называется конечно представимым, если функтор $Hom(B, -)$ сохраняет направленные копределы.

   (a) Докажите, что в категории **Set** множество является конечно представимым тогда и только тогда, когда оно является конечным.

   (b) Докажите, что в категории **Graph** граф является конечно представимым тогда и только тогда, когда он содержит конечное число вершин и ребер.

   (c) Докажите, что если B является конечно представимым, то функтор $(-)^B$ сохраняет направленные копределы в категориях **Set** и **Graph**.

Обратите внимание, что последнее утверждение не верно в общем случае. Но в случае категорий **Set** и **Graph** оно показывает, что в них сущесвуют модели индуктивных типов.