

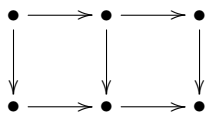
Задания

21 сентября 2015 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
 - (a) Начальные объекты.
 - (b) Копроизведения объектов.
 - (c) Булевский объект.
2. Докажите, что пулбэк любого мономорфизма также является мономорфизмом.
3. Докажите, что если $A \amalg B$ существует, то $B \amalg A$ тоже существует и изоморфен $A \amalg B$.
4. Начальный объект 0 произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида $X \rightarrow 0$ является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

Докажите, что в произвольной категории начальный объект 0 является строгим тогда и только тогда, когда для любого X произведение $X \times 0$ существует и $X \times 0 \simeq 0$.

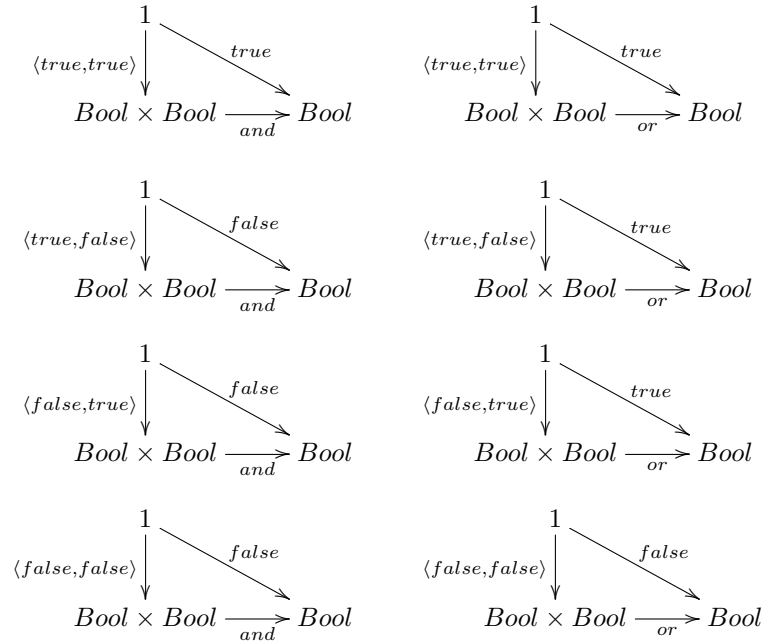
5. Пусть в диаграмме вида



правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

6. Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.
7. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех A и B существуют сумма и произведение и $A \amalg B \simeq A \times B$.

8. Идемпотентный морфизм $h : B \rightarrow B$ является расщепленным, если существуют $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$. Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.
9. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.
10. Пусть в категории \mathbf{C} есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в \mathbf{C} морфизмы $and, or : Bool \times Bool \rightarrow Bool$, такие что следующие диаграммы коммутируют



11. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевым объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

Пусть \mathbf{C} – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- \mathbf{C} – категория предпорядка.
- В \mathbf{C} терминальный объект является булевым.
- В \mathbf{C} существует булевский объект, такой что $true = false$.