Задания

28 сентября 2015 г.

1. Пусть $\mathbf{C}$ – категория предпорядка, а $\mathbf{D}$ – нет.
   (a) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть изоморфны?
   (b) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть эквивалентны?

2. Пусть $\mathbf{C}$ – категория с одним объектом, а $\mathbf{D}$ – нет.
   (a) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть изоморфны?
   (b) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть эквивалентны?

3. Пусть $\mathbf{C}$ – дискретная категория, а $\mathbf{D}$ – нет.
   (a) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть изоморфны?
   (b) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть эквивалентны?

4. Пусть $\mathbf{C}$ – группоид, а $\mathbf{D}$ – нет.
   (a) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть изоморфны?
   (b) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть эквивалентны?

5. Пусть $\mathbf{C}'$ – некоторая полная подкатегория категории $\mathbf{C}$. Какие из следующих утверждений верны?
   (a) Любой мономорфизм в $\mathbf{C}'$ является мономорфизмом в $\mathbf{C}$.
   (b) Любой морфизм в $\mathbf{C}'$, являющийся мономорфизмом в $\mathbf{C}$, является мономорфизмом в $\mathbf{C}'$.
   (c) Если $X \in Ob(\mathbf{C}')$ – (ко)предел диграммы $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}'$, то X – (ко)предел D в $\mathbf{C}$.
   (d) Если диграмма $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}'$ имеет (ко)предел в $\mathbf{C}$, то в $\mathbf{C}'$ тоже существует (ко)предел D.

6. Пусть $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – некоторый функтор. Какие из следующих утверждений верны? Как изменится ответ, если предположить, что F – эквивалентность категорий?
   (a) Если $f : X \to Y$ – мономорфизм в $\mathbf{C}$. то $F(f)$ – мономорфизм в $\mathbf{D}$.

(b) Если X – (ко)предел диаграммы $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$, то $F(X)$ – (ко)предел дираграммы $F \circ D : \mathbf{J} \to \mathbf{D}$.

7. Докажите, что **Num** эквивалентна $\mathbf{Set}_{fin}$.

8. Докажите, что **Mat** изоморфна $\mathbf{Mat}^{op}$.

9. Докажите, что $\mathbf{Set}_{fin}$ не эквивалентна **Set**.

10. Пусть $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – пара функторов. Естественное преобразование $\alpha : F \to G$ называется *естественным изоморфизмом*, если для любого объекта X в $\mathbf{C}$ морфизм $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ является изоморфизмом.

    Докажите, что $\alpha : F \to G$ – естественный изоморфизм тогда и только тогда, когда α – изоморфизм в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

11. Пусть $\mathbf{C}$ – декартова категория. Докажите, что $- \times 1$ изоморфен тождественному функтору в $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$.

12. Категория называется *тривиальной*, если она эквивалентна дискретной категории на одном объекте. Докажите, что категория тривиальна тогда и только тогда, когда в ней существует объект, являющийся терминальным и строгим начальным.

13. Пусть **Cat** – категория малых категорий. Ее объекты – это малые категории (то есть такие категории, в которых коллекции объектов и морфизмов являются множествами). Морфизмы в категории **Cat** – это функторы между категориями.

    Пусть **Graph** – категория графов. Ее объекты – графы, то есть пары (V, E), состоящие из множества вершин V и функции E, сопоставляющей каждой паре вершин $x, y \in V$ множество $E(x, y)$ ребер из x в y.

    Морфизм графов (V, E) и (U, D) состоит из функции $f : V \to U$ и функции $f : E(x, y) \to D(f(x), f(y))$ для всех $x, y \in V$. Композиция и тождественные морфизмы определены очевидным образом.

    Определите забывающий функтор из **Cat** в **Graph**. Докажите, что этот функтор строгий.

14. Пусть I – некоторое множество, тогда определим категорию $\mathbf{Fam}_I$ семейств множеств, индексированных I. Объекты категории $\mathbf{Fam}_I$ – это семейства множеств $\{A_i\}_{i \in I}$. Другими словами, объект **Fam** – это функция $A : I \to Ob(\mathbf{Set})$, сопоставляющей каждому $i \in I$ некоторое множество A_i.

    Морфизм в $\mathbf{Fam}_I$ из $\{A_i\}_{i \in I}$ в $\{B_i\}_{i \in I}$ – это семейство функций $\{f_i : A_i \to B_i\}_{i \in I}$. Композиции и тождественные морфизмы определяются очевидным образом.

Пусть $\mathbf{Set}/I$ – категория множеств над I. Объекты категории $\mathbf{Set}/I$ – это пары (X, f), где X – множество и $f : X \to I$ – функция. Морфизмы в $\mathbf{Set}/I$ из (X, f) в (Y, g) – это функции $h : X \to Y$ такие, что следующий треугольник коммутирует:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

Тождественные морфизмы и композиция определяются как соответствующие операции в $\mathbf{Set}$.

Докажите, что категории $\mathbf{Fam}_I$ и $\mathbf{Set}/I$ эквивалентны.