Задания

12 октября 2015 г.

1. На второй лекции мы видели, что морфизм групп является мономорфизмом тогда и только тогда, когда мономорфизмом является соответствующая ему функция на множествах. Сейчас мы можем обобщить это утверждение. Забывающий функтор $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным и строгим. Для любого функтора, удовлетворяющего этим двум условиям, можно доказать аналогичное утверждение.

   Пусть $U : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – некоторый функтор. Докажите следующие утверждения:

   (a) Если U является правым сопряженным, то он сохраняет мономорфизмы.

   (b) Если U является строгим, то обратное верно, то есть если $U(f)$ – мономорфизм, то f также является мономорфизмом.

2. Докажите, что у забывающего функтора $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Graph}$, сконструированного в предыдущем ДЗ, существует левый сопряженный.

3. Пусть $\mathbf{C}$ – произвольная категория. Если X – объект $\mathbf{C}$, то $\mathbf{C}/X$ – категория объектов над X. Объекты категории $\mathbf{C}/X$ – это морфизмы вида $A \to X$. Морфизмы в $\mathbf{C}/X$ из $f : A \to X$ в $g : B \to X$ – это морфизмы $h : A \to B$ в $\mathbf{C}$, такие что следующий треугольник коммутирует:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

   Тождественные морфизмы и композиция определяются как соответствующие операции в $\mathbf{C}$.

   Существует функтор $\Sigma_X : \mathbf{C}/X \to \mathbf{C}$, сопоставляющий объекту $f : A \to X$ в $\mathbf{C}/X$ объект A в $\mathbf{C}$. Докажите, что если в $\mathbf{C}$ существуют бинарные произведения, то у этого функтора существует правый сопряженный.

4. Пусть $f : X \to Y$ – морфизм в $\mathbf{C}$. Тогда можно определить функтор $\Sigma_f : \mathbf{C}_X \to \mathbf{C}_Y$, сопоставляющий объекту $g : A \to X$ в $\mathbf{C}/X$ объект $f \circ g$ в $\mathbf{C}/Y$. Докажите, что если в $\mathbf{C}$ существуют пулбэки, то у этого функтора существует правый сопряженный.

5. Докажите, что категория групп не является декартово замкнутой.

6. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует объект $2 = 1 \amalg 1$, то он является булевским.

7. Докажите, что в любой декртово замкнутой категории $\mathbf{C}$ выполнены следующие утверждения:

   (a) Для любого объекта A существует изоморфизм $A^1 \simeq A$.

   (b) Для любых объектов A, B и C существует изоморфизм $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C$.

   (c) Если в $\mathbf{C}$ существует начальный объект 0, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^0 \simeq 1$.

   (d) Если в $\mathbf{C}$ существует копроизведение $B \amalg C$, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^{B \amalg C} \simeq A^B \times A^C$.

8. Определите в произвольной декртово замкнутой категории комбинаторы K и S, то есть следующие морфизмы:

$$K : A \to A^B$$

$$S : (C^B)^A \to (C^A)^{(B^A)}$$

9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция suc должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм suc является расщепленным мономорфизмом.

10. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого x не верно, что $0 = suc(x)$. В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

    (a) $\mathbf{C}$ – категория предпорядка.

    (b) В $\mathbf{C}$ терминальный объект является объектом натуральных чисел.

    (c) В $\mathbf{C}$ существует объект натуральных чисел, такой что для любого $x : 1 \to N$ верно, что $zero = suc \circ x$.

    (d) В $\mathbf{C}$ существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого $x : 1 \to N$ верно, что $zero = suc \circ x$.

11. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует все копроизведения, то в ней существует объект натуральных чисел.

12. Определите в произвольной декртово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения $+ : N \times N \to N$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "\langle zero \circ !_N, id_N \rangle"'] \arrow[dr, "id_N"] & \\
N \times N \arrow[r, "+"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "+"] \arrow[d, "suc \times id_N"'] & N \arrow[d, "suc"] \\
N \times N \arrow[r, "+"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"] \arrow[dr, "+"'] & N \times N \arrow[d, "+"] \\
& N \times N
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(N \times N) \times N \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "+ \times id_N"'] & N \times (N \times N) \arrow[r, "id_N \times +"] & N \times N \arrow[d, "+"] \\
N \times N \arrow[rr, "+"'] & & N
\end{tikzcd}
$$

Я не буду просить сконструировать морфизм умножения, просто напишу, что он может быть охарактеризован как уникальный морфизм, удовлетворяющий следующим свойствам:

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "!_N"] \arrow[d, "\langle zero \circ !_N, id_N \rangle"'] & 1 \arrow[d, "zero"] \\
N \times N \arrow[r, "*"'] & N
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "id_N \times \langle id_N, id_N \rangle"] \arrow[d, "suc \times id_N"] & N \times (N \times N) \arrow[r, "\simeq"] & (N \times N) \times N \arrow[r, "* \times id_N"] & N \times N \arrow[d, "+"] \\
N \times N \arrow[rrr, "*"'] & & & N
\end{tikzcd}
$$